Лекция 10
Многокритериальные задачи принятия решений (продолжение). Нормализация критериев

Пусть, как и прежде, необходимо выбрать одно из множества решений X из области Ω_X их допустимых значений. Но в отличие от изложенного выше, каждое выбранное решение оценивается совокупностью критериев $f_1, f_2, \dots, f_k$, которые могут различаться своими коэффициентами относительной важности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Критерии $f_q, q = \overline{1, k}$, называют частными или локальными критериями, они образуют интегральный или векторный критерий оптимальности $F = \{f_q\}$. Коэффициенты $\lambda_q, q = \overline{1, k}$, образуют вектор важности $\Lambda = \{\lambda_q\}$. Каждый локальный критерий характеризует некоторую локальную цель принимаемого решения.
Оптимальное решение $\overline{X}$ должно удовлетворять соотношению

$$\bar{F} = \bar{F}(\bar{X}) = \underset{X \in \Omega_X}{\mathrm{opt}} [F(X), \Lambda], \qquad (2.8)$$

где $\overline{F}$ — оптимальное значение интегрального критерия; opt — оператор оптимизации, он определяет выбранный принцип оптимизации.
Область допустимых решений Ω_X может быть разбита на две непересекающиеся части:
Ω_X^c — область согласия, в которой качество решения может быть улучшено одновременно по всем локальным критериям или без снижения уровня любого из критериев;
Ω_X^K— область компромиссов, в которой улучшение качества решения по одним локальным критериям приводит **к** ухудшению качества решения по другим.

Очевидно, что оптимальное решение может принадлежать только области компромиссов, так как в области согласия решение может и должно быть улучшено по соответствующим критериям.
Выделение области компромисса сужает область возможных решений, но для выбора одного-единственного варианта решения далее следует раскрыть смысл оператора оптимизации opt выражения (2.8) или, как говорят, выбрать схему компромисса. Этот выбор осуществляется субъективно.

Рассмотрим основные схемы компромисса, предполагая вначале, что все локальные критерии нормализованы (т. е. имеют одинаковую размерность или являются безразмерными величинами) и одинаково важны. Рассмотрение удобно вести, перейдя от пространства Ω_X выбираемых решений X к пространству Ω_F возможных (допустимых) локальных критериев $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$,
деля его, как это было сделано выше, на область согласия и область компромиссов.

Тогда сформулированную ранее модель оптимизации (2.8) можно переписать в виде

$$\bar{F} = F(\bar{X}) = \underset{X \in \Omega_X^{\kappa}}{\mathrm{opt}}[F(X), \Lambda] = \underset{F \in \Omega_F^{\kappa}}{\mathrm{opt}}[F, \Lambda] .$$

Основными схемами компромисса являются принцип равномерности, принцип справедливой уступки, принцип выделения одного оптимизируемого критерия, принцип последовательной уступки.

Принцип равномерности провозглашает целесообразность выбора такого варианта решения, при котором достигалась бы некоторая «равномерность» показателей по всем локальным критериям. Используют следующие реализации принципа равномерности: принцип равенства, принцип максимина, принцип квазиравенства.

Принцип равенства формально выражается следующим образом:

$$\bar{F} = \underset{F \in \Omega_F^{\kappa}}{\mathrm{opt}} F = (f_1 = f_2 = \dots = f_k) ,$$

т. е. оптимальным считается вариант, принадлежащий области компромиссов, при котором все значения локальных критериев равны между собой.

Однако случай $f_1 = f_2 = \cdots = f_k$ может не попасть в область компромиссов или вообще не принадлежать к области допустимых вариантов.

Принцип максимина формально выражается следующим образом:

$$\bar{F} = \underset{F \in \Omega_F^{\kappa}}{\mathrm{opt}} F = \max_{F \in \Omega_F^{\kappa}} \min_{1 \leq q \leq k} f_q .$$

В случае применения этого принципа из области компромиссов выбираются варианты с минимальными значениями локальных критериев и среди них ищется вариант, имеющий максимальное значение. Равномерность в этом случае обеспечивается за счет «подтягивания» критерия с наименьшим уровнем.

Принцип квазиравенства заключается в том, что стремятся достичь приближенного равенства всех локальных критериев. Приближение характеризуется некоторой величиной δ. Этот принцип может быть использован в дискретном случае.

Следует отметить, что принципы равенства, несмотря на их привлекательность, не могут быть рекомендованы во всех случаях. Иногда даже небольшое отклонение от равномерности может дать значительный прирост по одному из критериев.

Принцип справедливой уступки основан на сопоставлении и оценке прироста и убыли величины локальных критериев. Переход от одного варианта к другому, если они оба принадлежат области компромиссов, неизбежно связан с улучшением по одним критериям и ухудшением по другим. Сопоставление и оценка изменения значения локальных критериев может производиться по абсолютному значению прироста и убыли критериев (принцип абсолютной уступки), либо по относительному

(принцип относительной уступки).

Принцип абсолютной уступки может быть формально выражен с помощью следующей записи:

$$\bar{F} = \underset{F \in \Omega_F^k}{\mathrm{opt}} F = \{\bar{F} / \sum_{j \in J^{(+)}} \Delta f_j \geq \sum_{i \in I^{(-)}} \Delta f_i\},$$

где $J^{(+)}$ — подмножество мажорируемых критериев, т. е. таких, для которых $\Delta f_1 > 0, I^{(-)}$ — подмножество минорируемых критериев, т.е. таких, для которых $\Delta f_i < 0$; $\Delta f_1, \Delta f_i$ — абсолютные значения приращения критериев; / — символ «такой, для которого». Таким образом, целесообразным считается выбрать такой вариант, для которого абсолютное значение суммы снижения одного или нескольких критериев не превосходит абсолютного значения суммы повышения оставшихся критериев.

Можно показать, что принципу абсолютной уступки соответствует модель максимизации суммы критериев

$$\bar{F} = \underset{F \in \Omega_F^k}{\mathrm{opt}} F = \max_{F \in \Omega_F^k} \sum_{q=1}^{k} f_q .$$

Недостатком принципа абсолютной уступки является то, что он допускает резкую дифференциацию уровней отдельных критериев, так как высокое значение интегрального критерия может быть получено за счет высокого уровня одних локальных критериев при сравнительно малых значениях других критериев измерения. Исключение составляют те задачи, в которых в качестве схемы компромисса применяется принцип относительной уступки.

В основу нормализации критериев положено понятие «идеального вектора», т. е. вектора с «идеальными» значениями параметров

$$\boldsymbol{F}^{(\text{н})} = \left\{f_1^{(\text{н})}, f_2^{(\text{н})}, \dots, f_k^{(\text{н})}\right\}.$$

В нормализованном пространстве критериев вместо действительного значения критерия f_q рассматривается безразмерная величина

$$f_q^{(\text{н})} = \frac{f_q}{f_q^{(\text{н})}}, q = \overline{1, k}.$$

Если лучшим считается большее значение критерия и если

$$f_q^{(\text{н})} \neq 0, \text{то } f_q^{(\text{н})} \in [0,1].$$

Успешное решение проблемы нормализации во многом зависит от того, насколько правильно и объективно удается определить идеальные значения $f_q^{(\text{н})}$. Способ выбора идеального вектора $F^{(\text{н})}$ и определяет способ нормализации. Рассмотрим основные способы нормализации.

Способ 1. Идеальный вектор определяется заданными величинами критериев

$$\boldsymbol{F}^{\text{н}} = F^{(\text{зад})} = \left\{f_q^{(\text{зад})}\right\}, q = \overline{1, k}.$$

Недостатком этого способа является сложность и субъективность назначения $F^{(\text{зад})}$ что приводит к субъективности оптимального решения.

Способ 2. В качестве идеального вектора выбирают вектор, параметрами которого являются максимально возможные значения локальных критериев:

$$F^{\text{н}} = F_{max} = \{f_{1_{max}}, f_{2_{max}}, \dots, f_{k_{max}}.$$

Недостатком этого способа является то, что он существенно зависит от максимально возможного уровня локальных критериев. В результате равноправие критериев нарушается и предпочтение автоматически отдается варианту с наибольшим значением локальною критерия.

Способ 3. В качестве параметров идеального вектора принимают максимально возможный разброс соответствующих локальных критериев, т. е.

$$F_q^{(\text{н})} = f_{q_{max}} - f_{q_{min}}, q = \overline{1,k}.$$

Нормализация критериев

Нормализация критериев по существу является преобразованием пространства критериев, в котором задача выбора варианта приобретает большую ясность.

Способы задания и учета приоритета критериев. Приоритет локальных критериев может быть задан с помощью ряда приоритета, вектора приоритета, весового вектора.

Ряд приоритета $\vec{R}$ является упорядоченным множеством индексов локальных критериев$\vec{R} = \{1,2, \dots, k\}$.

Критерии, индексы которых стоят слева, доминируют над критериями, индексы которых стоят справа. При этом доминирование является качественным: критерий f_1 всегда более важен, чем f_2, и т. д.

В том случае, если среди критериев имеются равно-приоритетные, они выделяются в ряде приоритета скобками, например:$\vec{R} = \{1,2, (3.4), \dots, k\}$.

Приоритет критериев может быть задан вектором приоритета $\vec{\Lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$, компоненты которого представляют собой отношения, определяющие степень относительного превосходства по важности двух соседних критериев из ряда приоритета, а именно: величина λ_q, определяет, на сколько критерии f_q важнее критерия f_{q+1}.

Если некоторые критерии f_q и f_{q+1} равнозначны, то соответствующая компонента $\lambda_q = 1$. Для удобства вычислений обычно полагают $\lambda_k = 1$.

Вектор приоритета $\vec{\Lambda}$ определяется в результате попарного сравнения локальных критериев, предварительно упорядоченных в соответствии с рядом приоритета $\vec{R}$. Очевидно, что любая компонента вектора приоритета $\vec{\Lambda}$ удовлетворяет соотношению

$$\lambda_q \geq 1, q = \overline{1,k}.$$

Весовой вектор

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$$

представляет собой k-мерный вектор, компоненты которого связаны соотношениями

$$0 \le \alpha_q \le 1, q = \overline{1,k};\ \sum_{q=1}^{k} \alpha_q = 1.$$

Принцип относительной уступки может быть записан в виде

$$\bar{F} = \underset{F \in \Omega_F^*}{\mathrm{opt}} F = \{\bar{F} / \sum_{j \in I^{(+)}} \chi_j \geq \sum_{i \in I^{(-)}} \chi_i\},$$

где $x_j = \Delta f_j / f_{J_{max}}$; $x_i = \Delta f_i / f_{i_{max}}$ — относительные изменения критериев; $f_{j_{max}}, f_{i_{max}}$ — максимальные значения критериев.

Целесообразно выбрать тот вариант, при котором суммарный относительный уровень снижения одних критериев меньше суммарного относительного уровня повышения других критериев.

Можно сказать, что принципу относительной уступки соответствует модель максимизации произведения критериев

$$\bar{F} = \underset{F \in \Omega_F^*}{\mathrm{opt}} F = \underset{F \in \Omega_F^*}{\max} \prod_{q=1}^{k} f_q.$$

Принцип относительной уступки весьма чувствителен к величине критериев, причем за счет относительности уступки происходит автоматическое снижение «цены» уступки для локальных критериев с большой величиной и наоборот. В результате проводится значительное сглаживание уровней локальных критериев. Важным преимуществом принципа относительной уступки является также то, что он инвариантен к масштабу изменения критериев, т. е. его использование не требует предварительной нормализации локальных критериев.

Принцип выделения одного оптимизируемого критерия формально может быть записан следующим образом:

$$\bar{F} = \underset{F \in \Omega_F^*}{\mathrm{opt}} F = \underset{F \in \Omega_F^*}{\max} f_i$$

при условиях

$$f_q \geqq f_{q_{\text{доп}}},\ q = \overline{1,k},\ i \neq q,$$

где f_i — оптимизируемый критерий.

Один из критериев является оптимизируемым и выбирают тот вариант, при котором достигается максимум этого критерия. На другие критерии накладываются ограничения.

Принцип последовательной уступки. Предположим, что локальные критерии расположены в порядке убывающей важности: сначала основной критерий f_1, затем другие, вспомогательные критерии $f_2, f_3, \ldots$ Как и ранее, считаем, что каждый из них нужно обратить в максимум. Процедура построения компромиссного решения сводится к следующему. Сначала находят решение, обращающее в максимум главный критерий f_1. Затем, исходя из практических соображений, например из точности, с которой известны исходные данные, назначают некоторую «уступку» Δf_1, допустимую для того, чтобы обратить в максимум второй критерий f_2. Налагаем на критерий f_1 требование, чтобы он был меньше, чем $f_{1_{max}} - \Delta f_1$, где $f_{1_{max}}$ — максимально возможное значение f_1, и при этом ограничении ищем вариант, обращающий в максимум f_2. Далее снова назначают «уступку» в критерии f_2, ценой которой можно максимизировать f_3, и т. д.

Такой способ построения компромиссного решения хорош тем, что здесь отчетливо видно, ценой какой «уступки» в одном критерии приобретается выигрыш в другом. Свобода выбора решения, приобретаемая ценой даже незначительных «уступок», может оказаться существенной, так как в районе максимума обычно эффективность решения меняется очень слабо.

Ранее предполагалось, что лучшим считается большее значение локальных критериев, т. е. решалась задача максимизации интегрального критерия.

В том случае, если лучшим считается меньшее значение критериев, то от задачи минимизации следует перейти к задаче максимизации путем умножения интегральной функции F на — 1 и замены F на $F' = -F$.

Если ряд критериев необходимо максимизировать, а остальные минимизировать, то для выражения интегрального критерия можно использовать соотношение

$$\operatorname{opt} \bar{F} = \max_{F \in \Omega_f^*} \left[\left(\prod_{q=1}^{l} f_q \right) \left(\prod_{q=l+1}^{k} f_q \right)^{-1} \right]$$

либо

$$\operatorname{opt} \bar{F} = \max_{F \in \Omega_f^*} \left[\sum_{q=1}^{l} f_q + \left(\sum_{q=l+1}^{k} f_q \right)^{-1} \right],$$

где $f_q, q = \overline{1, l}$ — локальные критерии, которые необходимо максимизировать; $f_q, q = \overline{l+1, k}$ — локальные критерии, которые необходимо минимизировать.

Способы нормализации критериев. Проблема нормализации критериев возникает во всех задачах векторной оптимизации, в которых локальные критерии оптимальности имеют различные единицы.

Компонента α_i вектора $\vec{\alpha}$ имеет смысл весового коэффициента, определяющего относительное превосходство критерия f_q над всеми остальными.

Компоненты векторов $\vec{\Lambda}$ и $\vec{\alpha}$ связаны соотношениями

$$\lambda_q = \alpha_q / \alpha_{q+1}.$$

Приоритет критериев проще задавать с помощью вектора приоритета, поскольку его компоненты определяются сравнением важности только двух соседних критериев, а не всей совокупности критериев, как при задании весового вектора. Причем это удобно делать последовательно, начиная с последней пары критериев, положив $\lambda_k = 1$. Можно показать [14], что при $\lambda_k = 1$

$$\alpha_q = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i \left(\sum_{q=1}^{k} \prod_{i=q}^{k} \lambda_i\right)^{-1}.$$

Если приоритет критериев задан в виде ряда, то при выборе оптимального варианта применяют принцип «жесткого приоритета», при котором осуществляется последовательная оптимизация. При этом не допускается повышение уровня критериев с низкими приоритетами, если происходит хотя бы небольшое снижение значения критерия с более высоким приоритетом.

Если заданы вектор приоритета $\vec{\Lambda}$ или весовой вектор $\vec{\alpha}$, то при выборе оптимального варианта можно использовать принцип «гибкого приоритета». При этом оценка варианта производится по взвешенному векторному критерию, где в качестве компонент вектора критериев $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ используются компоненты вектора $\{\alpha_1 f_1, \alpha_2 f_2, \dots, \alpha_k f_k\}$. В этом случае могут быть применены все рассмотренные принципы выбора варианта в области компромиссов (принципы равенства, справедливой уступки и т. д.) с заменой f_q на $\alpha_q f_q$.

Примером многокритериальной задачи принятия решений может служить рассмотренная задача выбора метода кодирования картографической информации в следующей интерпретации. Алгоритмы, реализующие тот или иной метод кодирования (линейная интерполяция, интерполяция классическими многочленами, кубические сплайны и т. д.), характеризуются следующими локальными критериями: погрешность интерполяции — f_1, время реализации алгоритма – f_2, требуемый объем памяти – f_3 и т.д. Пусть для проектировщика эти локальные критерии в данной ситуации имеют следующую относительную важность: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и т. д. соответственно. Тогда, при использовании метода абсолютной уступки лучшим будет такой метод кодирования, для которого (для случая трех локальных критериев):

$$F = \max_i \left[\sum_{q=1}^{3} \alpha_q f_q\right],$$

где i –й метод кодирования ($i = \overline{1, n}$);

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3},$$

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3},$$

$$\alpha_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3},$$

$$\lambda_3 = 1.$$