Лекция 11
Принятие решений в условиях неопределенности.

Оценка сложных системы в условиях нестохастической неопределенности

Особенностями оценки сложных систем в условиях неопределенностиявляются:

1. Наличие в управляющей системе в качестве элемента ЛПР, осуществляющему управление на основе субъективных моделей, которые приводят к большому разнообразию поведения системы.
2. Алгоритм управления строит сама система управления, преследуя помимо целей старшей системы свои цели, не всегда совпадающие с внешними.
3. На этом этапе оценки ситуации в ряде случаев исходят не из фактической ситуации, а из той модели, которую использует ЛПР.
4. В процессе принятия решений большую роль играют логические рассуждения ЛПР, не поддающиеся формализации классическими методами математики.
5. При выборе управляющего воздействия ЛПР может оперировать нечеткими понятиями, отношениями и высказываниями.
6. В большинстве классов задач управление АСУ отсутствуют объективные критерии оценивания достижения целевого и текущего состояния ОУ, а также статистических данных для определения вероятностных законов для конкретного принятого решения.

Таким образом, методы принятия решений, используемые для детерминированных и вероятностных решений, для данного класса задач неприменимы

Поэтому для оценки систем в условиях нестохастической неопределенности используются методы, в основе которых лежит матрица эффективности в виде:

a_i	n_j				$K(a_i)$
	n_1	n_2	$\dots$	n_k	
a_1 a_2 $\vdots$ a_m	k_{11} k_{21} $\vdots$ k_{m1}	k_{12} k_{22} $\vdots$ k_{m2}		k_{1k} k_{2k} $\vdots$ k_{mn}	

где a_i - вектор управляемых параметров, определяющих свойства системы ;

n_j - вектор неуправляемых параметров, определяющих состояния обстановки ;

k_{11} - значение эффективности системы a_i для состояния обстановки n_j;

$K(a_i)$ - эффективность системы.

В зависимости от характера неопределенности операции делятся на игровые и статистические.

В игровых операциях неопределенность вносит своими сознательными действиями противник (теория игр).

Условия статистически неопределенных операций зависят от объективной действительности (природы). Природа пассивно по отношению к лицу, принимающему решение – теория статических решений.

Принятие решении в условиях неопределенности. Прежде всего отметим принципиальное различие между стохастическими факторами, приводящими к принятию решения в условиях рыска, и неопределенными факторами, приводящими к принятию решения в условиях неопределенности. И те, и другие приводят к разбросу возможных исходов результатов управления. Но стохастические факторы полностью описываются известной стохастической информацией, эта информация и позволяет выбрать лучшее в среднем решение. Применительно к неопределенным факторам подобная информация отсутствует.

В общем случае неопределенность может быть вызвана либо противодействием разумного противника, либо недостаточной осведомленностью об условиях, в которых осуществляется выбор решения.

Принятие решений в условиях разумного противодействия является объектом исследования теории игр. Мы здесь не будем касаться этих вопросов.

Рассмотрим принципы выбора решений при наличии недостаточной осведомленности относительно условий, в которых осуществляется выбор. Такие ситуации принято называть «играми с природой».

В терминах «игр с природой» задача принятия решений может быть сформулирована следующим образом. Пусть лицо, принимающее решение, может выбрать один из m возможных вариантов своих решений: $x_1, x_2, \dots, x_m$ и пусть относительно условий, в которых будут реализованы возможные варианты, можно сделать n предположений: $y_1, y_2, \dots, y_n$. Оценки каждого варианта решения в каждых условиях (x_i, y_i) известны и заданы в виде матрицы выигрышей лица, принимающего решения: $A = |a_{ij}|$.

Предположим вначале, что априорная информация о вероятностях возникновения той или иной ситуации y_j отсутствует.

Теория статистических решений предлагает несколько критериев оптимальности выбора решений. Выбор того или иного критерия неформализуем, он осуществляется человеком, принимающим решения, субъективно, исходя из его опыта, интуиции и т. д. Рассмотрим эти критерии.

Классические критерии принятия решений .

Критерий среднего выигрыша. Данный критерий предполагает задание вероятностей состояния обстановки P_i. Эффективность системы оценивается как среднее ожидаемое значение (МОЖ) оценок эффективности по всем состояниям обстановки

$$K(a_i) = \sum_{j=1}^{l} P_j k_{ij} \qquad i = \overline{1, m}$$

оптимальной системе будет соответствовать эффективность

$$K^{опт} = \max_i \sum_{j=1}^{l} P_j k_{ij}, \quad i = \overline{1, m}$$

Критерий минимакса

$$K(a_i) = \max_j \Delta k_{ij}$$

$$K^{опт} = \min_i (\max_j \Delta k_{ij})$$

Критерий максимакса. Этим критерием предписывается оценивать системы по максимальному значению эффективности и выбирать в качестве оптимального решения обследующую эффективность с наибольшим из максимумов:

$$K(a_i) = \max_j k_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, l}$$

$$K^{опт} = \max_i \left(\max_j k_{ij} \right), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, l}$$

Это самое оптимистическое решение. При этом риск max.

Критерий Лапласа. Поскольку вероятности возникновения той или иной ситуации y_j неизвестны, будем их все считать равновероятными. Тогда для каждой строки матрицы выигрышей подсчитывается среднее арифметическое значение оценок. Оптимальному решению будет соответствовать такое решение, которому соответствует максимальное значение этого среднего арифметического, т. е.

$$\overline{F} = F(\overline{X}, Y) = \max_{1 \le i \le m} (1/n) \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Критерий Вальда. В каждой строчке матрицы выбираем минимальную оценку. Оптимальному решению соответствует такое решение, которому соответствует максимум этого минимума, т. е.

$$\overline{F} = F(\overline{X}, Y) = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le i \le n} a_{ij}.$$

Этот критерий очень осторожен. Он ориентирован на наихудшие условия, только среди которых и отыскивается наилучший и теперь уже гарантированный результат.

Критерий Сэвиджа. В каждом столбце матрицы находится максимальная оценка $\max_{1 \le i \le m} a_{ij}$ и составляется новая матрица, элементы которой определяются соотношением

$$r_{ij} = \max_{1 \le i \le m} a_j - a_{ij}.$$

Величину r_{ij} называют риском, под которым понимают разность между максимальным выигрышем, который имел бы место, если бы было достоверно известно, что наступит ситуация y_j, и выигрышем при выборе решения x_i в условиях y_j. Эта новая матрица называется **матрицей рисков.** Далее из матрицы рисков выбирают такое решение, при котором величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т. е.

$$\overline{F} = F(\overline{X}, Y) = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} r_{ij} = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} \left(\max_{1 \le i \le m} a_{ij} - a_{ij} \right).$$

Сущность этого критерия заключается в минимизации риска. Как и критерий Вальда, критерий Сэвиджа очень осторожен. Они различаются разным пониманием худшей ситуации: в первом случае — это минимальный выигрыш, во втором — максимальная потеря выигрыша по сравнению с тем, чего можно было бы достичь в данных условиях.

Производные критерии.

Критерий Гурвица. Вводится некоторый коэффициент а, называемый «коэффициентом оптимизма», $0 \le \alpha \le 1$. В каждой строке матрицы выигрышей находится самая большая оценка $\max_{1\le j\le n} a_{ij}$ и самая маленькая$\min_{1\le j\le n} a_{ij}$. Они умножаются соответственно на α и $(1-\alpha)$ и затем вычисляется их сумма. Оптимальному решению будет соответствовать такое решение, которому соответствует максимум этой суммы, т. е.

$$\overline{F} = F(\overline{X}, Y) = \max_{1\le i\le m} [\alpha \max_{1\le j\le n} a_{ij} + (1-\alpha) \min_{1\le j\le n} a_{ij}].$$

При $\alpha = 0$ критерий Гурвица трансформируется в критерий Вальда. Это случай крайнего «пессимизма». При $\alpha = 1$ (случай крайнего «оптимизма») человек, принимающий решение, рассчитывает на то, что ему будет сопутствовать самая благоприятная ситуация. «Коэффициент оптимизма» a назначается субъективно, исходя из опыта, интуиции и т. д. Чем более опасна ситуация, тем более осторожным должен быть подход к выбору решения и тем меньшее значение присваивается коэффициенту α.

Примером принятия решений в условиях неопределенности может служить рассмотренная выше задача выбора метода кодирования картографической информации, когда вероятности появления того или иного вида этой информации неизвестны.

Критерий Ходжа-Лемана. Этот критерий опирается одновременно на ММ-критерий и критерий Баеса-Лапласа. С помощью параметра ν выражается степень доверия к используемому распределений вероятностей. Если доверие велико, то доминирует критерий Баеса-Лапласа, в противном случае - ММ-критерий, т.е. мы ищем

$$\max_i e_{ir} = \max_i \{\nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij}\, q_i + (1-\nu) \min_j e_{ir}\}, \qquad 0 \le \nu \le 1. \qquad (*)$$

Правило выбора, соответствующее критерию Ходжа-Лемана формируется следующим образом:

матрица решений $\| e_{ij} \|$ дополняется столбцом, составленным из средних взвешенных (с весом $\nu \equiv const$) математическое ожиданиями и наименьшего результата каждой строки (*). Отбираются те варианты решений в строках которого стоит набольшее значение этого столбца.

При ν = 1 критерий Ходжа-Лемана переходит в критерий Байеса-Лапласа, а при ν = 0 становится минимаксным.

Выбор ν субъективен т. к. Степень достоверности какой-либо функции распределения - дело тёмное.

Для применения критерия Ходжа-Лемана желательно, чтобы ситуация в которой принимается решение, удовлетворяла свойствам:

1) вероятности появления состояния F_j неизвестны, но некоторые предположения о распределении вероятностей возможны;
2) принятое решение теоретически допускает бесконечно много реализаций;
3) при малых числах реализации допускается некоторый риск.

Критерий Гермейера. Этот критерий ориентирован на величину потерь, т.е. на отрицательные значения всех e_{ij}. При этом

$$\max_i e_{ir} = \max_i \min_j e_{ij} q_j.$$

Т.к. в хозяйственных задачах преимущественно имеют дело с ценами и затратами, условие $e_{ij}<0$ обычно выполняется. В случае же, когда среди величин e_{ij} встречаются и положительные значения, можно перейти к строго отрицательным значениям с помощью преобразования $e_{ij} - a$ при подходящем образом подобранном $a > 0$. При этом оптимальный вариант решения зависит от a.

Правило выбора согласно критерию Гермейера формулируется следующим образом :
матрица решений $\| e_{ij} \|$ *дополняется ещё одним столбцом содержащим в каждой строке наименьшее произведение имеющегося в ней результата на вероятность соответствующего состояния* F_j. *Выбираются те варианты в строках которых находится наибольшее значение* e_{ij} *этого столбца.*

В каком-то смысле критерий Гермейера обобщает ММ-критерий: в случае равномерного распределения $q_j = \frac{1}{n}$, $j = \overline{1,n}$, они становятся идентичными.

Условия его применимости таковы :
1) вероятности появления состояния F_j неизвестны;
2) с появлением тех или иных состояний, отдельно или в комплексе, необходимо считаться;
3) допускается некоторый риск;
4) решение может реализоваться один или несколько раз.

Если функция распределения известна не очень надёжно, а числа реализации малы, то, следуя критерию Гермейера, получают, вообще говоря, неоправданно большой риск.

BL (MM) - критерий. Стремление получить критерии, которые бы лучше приспосабливались к имеющейся ситуации, чем все до сих пор рассмотренные, привело к построению так называемых составных критериев. В качестве примера рассмотрим критерий, полученный путем объединения критериев Байеса-Лапласа и минимакса.

Правило выбора для этого критерия формулируется следующим образом:
матрица решений $\| e_{ij} \|$ *дополняется еще тремя столбцами. В первом из них записываются математические ожидания каждой из строк, во втором - разность между опорным значением*

$$e_{i_0 j_0} = \max_i \max_j e_{ij}$$

и наименьшим значением $\min_j e_{ij}$

соответствующей строки. В третьем столбце помещаются разности между наибольшим значением $\max_j e_{ij}$

каждой строки и наибольшим значением $\max e_{i_0 j}$ *той строки, в которой находится значение* $e_{i_0 j_0}$ *. Выбираются те варианты, строки которых (при соблюдении приводимых ниже соотношений между элементами второго и третьего столбцов) дают наибольшее математическое ожидание. А именно, соответствующее значение*

$$e_{i_0 j_0} - \max_j e_{ij}$$

из второго столбца должно быть или равно некоторому заранее заданному уровню риска $\varepsilon_{доп}$*. Значение же из третьего столбца должно быть больше значения из второго столбца.*

Применение этого критерия обусловлено следующими признаками ситуации, в которой принимается решение:

1) вероятности появления состояний F_j неизвестны, однако имеется некоторая априорная информация в пользу какого-либо определенного распределения;
2) необходимо считаться с появлением различных состояний как по отдельности, так и в комплексе;
3) допускается ограниченный риск;
4) принятое решение реализуется один раз или многократно.

BL(MM)-критерий хорошо приспособлен для построения практических решений прежде всего в области техники и может считаться достаточно надежным. Однако заданные границы риска $\varepsilon_{доп}$ и, соответственно, оценок риска ε_i не учитывает ни число применения решения, ни иную подобную информацию. Влияние субъективного фактора хотя и ослаблено, но не исключено полностью.

Условие

$$\max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0 j} \geq \varepsilon_i$$

существенно в тех случаях, когда решение реализуется только один или малое число раз. В этих условиях недостаточно ориентироваться на риск, связанный только с невыгодными внешними состояниями и средними значениями. Из-за этого, правда, можно понести некоторые потери в удачных внешних состояниях. При большом числе реализаций это условие перестает быть таким уж важным. Оно даже допускает разумные альтернативы. При этом не известно, однако, четких количественных указаний, в каких случаях это условие следовало бы опускать.

Критерий произведений.

$$\max_i e_{ir} := \max_i \prod_j e_{ij}$$

Правило выбора в этом случае формулируется так :

Матрица решений $\| e_{ij} \|$ *дополняется новым столбцом, содержащим произведения всех результатов каждой строки. Выбираются те варианты, в строках которых находятся наибольшие значения этого столбца.*

Применение этого критерия обусловлено следующими обстоятельствами :

1) вероятности появления состояния F_j неизвестны;
2) с появлением каждого из состояний F_j по отдельности необходимо считаться;
3) критерий применим и при малом числе реализаций решения;
4) некоторый риск допускается.

Критерий произведений приспособлен в первую очередь для случаев, когда все e_{ij} положительны. Если условие положительности нарушается, то следует выполнять некоторый сдвиг $e_{ij} + a$ с некоторой константой $a > |\min_{ij} e_{ij}|$. Результат при этом будет, естественно зависеть от a. На практике чаще всего

$$a := |\min_{ij} e_{ij}| + 1.$$

Если же никакая константа не может быть признана имеющей смысл, то критерий произведений не применим.

Пример. Рассмотрим пример

	F_1	F_2	F_3	ММ-критерий		критерий B-L	
				$e_{ir} = \min_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$	$e_{ir} = \sum_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$
E_1	-20.0	-22.0	-25.0	-25.0	-25.0	-22.33	
E_2	-14.0	-23.0	-31.0	-31.0		-22.67	
E_3	0	-24.0	-40.0	-40.0		-21.33	-21.33

Построение оптимального решения для матрицы решений о проверках по критерию Гурвица имеет вид (при C =0.5, в 10^3):

$\| e_{ij} \|$			$C \min_j e_{ij}$	$(1-C) \max_j e_{ij}$	e_{ir}	$\max_i e_{ir}$
-20.0	-22.0	-25.0	-12.5	-10.0	-22.5	
-14.0	-23.0	-31.0	-15.5	-7.0	-22.5	
0	-24.0	-40.0	-20.0	0	-20.0	-20.0

В данном примере у решения имеется поворотная точка относительно весового множителя C : до $C = 0.57$ в качестве оптимального выбирается E_3, а при больших значениях E_1.

Применение критерия Ходжа-Лемана ($q = 0.33$, $\nu = 0.5$, в 10^3) :

$\sum_j e_{ij} q_j$	$\min_j e_{ij}$	$\nu \sum_j e_{ij} q_j$	$(1-\nu) \min_j$	e_{ir}	$\max_i e_{ir}$
-22.33	-25.0	-11.17	-12.5	-23.67	-23.67

-22.67	-31.0	-11.34	-15.5	-26.84	
-21.33	-40.0	-10.67	-20.0	-30.76	

Критерий Ходжа-Лемана рекомендует вариант E_1 (полная проверка) так же как и ММ-критерий. Смена рекомендуемого варианта происходит только при ν = 0.94. Поэтому равномерное распределение состояний рассматриваемой машины должно распознаваться с очень высокой вероятностью, чтобы его можно было выбрать по большему математическому ожиданию. При этом число реализаций решения всегда остаётся произвольным.

Критерий Гермейера при q_j = 0.33 даёт следующий результат (в 10^3):

$\|e_{ij}\|$			$\|e_{ij}q_j\|$			$e_{ir} = \min_j e_{ij}q_j$	$\max_i e_{ir}$
-20.0	-22.0	-25.0	-6.67	-7.33	-8.33	-8.33	-8.33
-14.0	-23.0	-31.0	-4.67	-7.67	-10.33	-10.33	
0	-24.0	-40.0	0	-8.0	-13.33	-13.33	

В качестве оптимального выбирается вариант E_1. Сравнение вариантов с помощью величин e_{ir} показывает, что способ действия критерия Гермейера является даже более гибким, чем у ММ-критерия.

В таблице, приведенной ниже, решение выбирается в соответствии с BL(ММ)-критерием при $q_1=q_2=q_3={}^1/_2$ (данные в 10^3).

$\|e_{ij}\|$			$\sum_j e_{ij}q_j$	$e_{i_0j_0} - \min_j e_{ij}$	$\max_j e_{ij}$	$\max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0j}$
-20.0	-22.0	-25.0	-23.33	0	-20.0	0
-14.0	-23.0	-31.0	-22.67	+6.0	-14.0	+6.0
0	-24.0	-40.0	-21.33	+15.0	0	+20.0

Вариант E_3 (отказ от проверки) принимается этим критерием только тогда, когда риск приближается к $\varepsilon_{возм} = 15 \times 10^3$. В противном случае оптимальным оказывается E_1. Во многих технических и хозяйственных задачах допустимый риск бывает намного ниже, составляя обычно только незначительный процент от общих затрат. В подобных случаях бывает особенно ценно, если неточное значение распределения вероятностей сказывается не очень сильно. Если при этом оказывается невозможным установить допустимый риск $\varepsilon_{доп}$заранее, не зависимо от принимаемого решения, то помочь может вычисление ожидаемого риска $\varepsilon_{возм}$. Тогда становится возможным подумать, оправдан ли подобный риск. Такое исследование обычно дается легче.

Результаты применения критерия произведения при a = 41·10^3 и a = 200·10^3 имеют вид :

	$\|e_{ij} + a\|$			$e_{ir} = \prod_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$
	+21	+19	+16	6384	6384

a=41	+27	+18	+10	4860	
	+41	+17	+1	697	
	+180	+178	+175	5607	
a=200	+186	+177	+169	5563	
	+200	+176	+160	5632	5632

Условие $e_{ij} > 0$ для данной матрицы не выполнимо. Поэтому к элементам матрицы добавляется (по внешнему произволу) сначала $a = 41 \cdot 10^3$, а затем $a = 200 \cdot 10^3$.

Для $a = 41 \cdot 10^3$ оптимальным оказывается вариант E_1, а для $a = 200 \cdot 10^3$ □ вариант E_3, так что зависимость оптимального варианта от a очевидна.

Планирование эксперимента в условиях неопределённости.

Если априорной информации нет или она ненадёжна, то можно путём проведения эксперимента получить более надёжные данные о вероятности Q_j. Под <u>экспериментом</u> понимают систему мероприятий позволяющих уточнить информацию о состоянии природы. Насколько может помочь в принятии решения эксперимент и как сопоставить стоимость эксперимента с тем оптимальным выигрышем, который мы получим?

Соответствующую теорию можно построить исходя из знания вероятности Q_j, а так же из знания на основе критериев при неизвестной априорной информации. Мы рассмотрим когда есть априорная информация, т. е. ситуацию идеального наблюдателя. Появляется вопрос: есть ли смысл проводить эксперимент? Возможны два случая:

1) **Идеальный эксперимент**. Результат этого эксперимента однозначно определяет каковы условия природы. Пусть заданы выигрыши a_{ij} и априорные вероятности Q_j. Стоимость эксперимента сопоставима с a_{ij}, т. е. имеют одинаковую размерность. Сравним средний выигрыш без проведения эксперимента со средним выигрышем при проведении эксперимента:

$$\text{Нет эксперимента: } \max_i \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} Q_j \right) = \overline{a_{\max}}$$

Если мы проведём эксперимент, то мы точно узнаем $P_j = P_k$, и тогда найдя в $k-$ом столбце максимальный выигрыш, мы найдём наш выигрыш: $\max_i a_{ij} = \beta_k$.

Но нам нужно оценить эффективность эксперимента до его проведения, поэтому мы должны ориентироваться на средний ожидаемый выигрыш, который мы получим, если будем проводить эксперимент. Таким образом, после эксперимента мы можем ожидать выигрыш $\sum_{j=1}^{n} Qj \times \beta_j$.

Поэтому чтобы решить, проводить эксперимент или нет, надо определить, что больше: $a_{\max}$ или $\sum_{j=1}^{n} Q_j \times \beta_j - c$. Получается, что мы будем проводить эксперимент, если:

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j \beta_j - c > \max_i \sum_{j=1}^{n} Q_j a_{ij}$$

В преобразовав это неравенство, получим:

$$c < \min_i \overline{r_i}$$

2) **Неидеальный эксперимент**. В результате проведения эксперимента мы не находим однозначно P_j, а лишь изменяем вероятность Q_j. Пусть проводится неидеальный эксперимент. В результате появляются некоторые несовместные события $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$. Вероятности этих событий зависят от условий, в которых они проводятся. Пусть известны $P(B_l / P_j)$. Эти вероятности называются <u>прямыми</u>. После эксперимента, давшего исход B_l необходимо пересмотреть вероятности Q_j, т. е. вместо вероятности Q_j мы перейдём к вероятности $\overline{Q_{jl}}$. Это так называемые <u>апостериорные вероятности</u>:

$$\overline{Q_{jl}} = P(P_j / B_l) = \frac{Q_j \times P(B_l / P_j)}{\sum_{j=1}^{n} \left(Q_j \times P(B_l / P_j)\right)} \text{ – формула Байеса.}$$

Но результаты эксперимента могут быть и B_1 и B_2 и B_k, поэтому мы можем только ожидать всякие исходы B_l, которые получатся в результате эксперимента. Причём, каждый исход B_l привёл бы к некоторым оптимальным стратегиям A_l^*. А величина выигрыша, которая бы при этом получилась:

$$\overline{\overline{a}}_l = \max_i \overline{\overline{a}}_{il} = \max_i \sum_{j=1}^{n} \left(\tilde{Q}_{jl} \times a_{ij}\right)$$

Эти выигрыши $\overline{\overline{a}}_l$, могут произойти с вероятностью события B_l, т. е. это вероятность $P(B_l)$. У нас их нет, но их можно получить по формуле полной вероятности:

$$P(B_l) = \sum_{j=1}^{n} Q_j P(B_l / P_j)$$

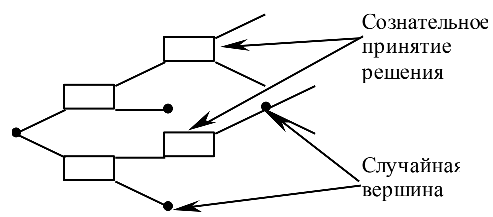
Тогда ожидаемый выигрыш будет:

$$\overline{\overline{\overline{a}}} = \sum_{l=1}^{k} a_l P(B_l) \Rightarrow \overline{\overline{\overline{a}}} - c > \max_i \sum Q_j a_{ij} \Rightarrow \overline{\overline{\overline{a}}} - c > \overline{a}_{\max}$$

Можно рассмотреть случай, когда проводят $2,3,4,\ldots$ эксперимента. Их при этом считают независимыми.

Многоэтапное принятие решений.

Мы рассмотрели различные критерии принятия решений в условиях неопределённости. На практике, в таких задачах как, проектирование изделий, программ, мы можем столкнуться с



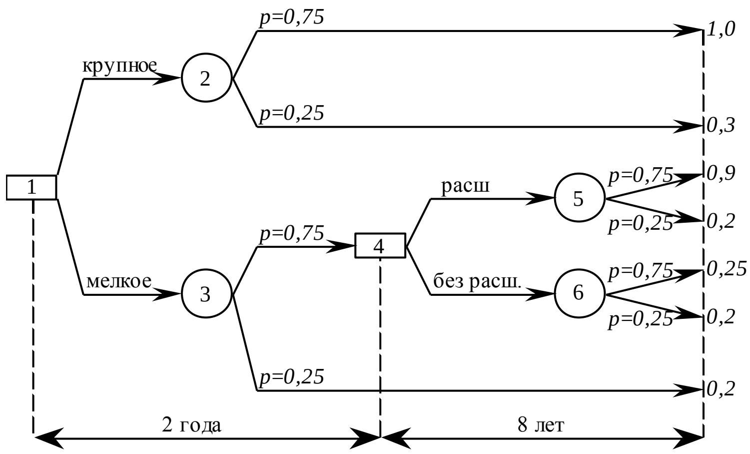
принятием последовательных решений. Особое значение вот такие многоэтапные решения имеют при создании автоматизированных экспертных систем. Рассмотрим вопрос оптимизации многоэтапных решений. Многоэтапность приводит к тому, что схема принятия решения может быть представлена в виде дерева, в каждой вершине которого осуществляется либо:

1) Сознательный выбор между двумя и более альтернативами
2) Случайный переход из одной ветви в другую под воздействием внешних факторов

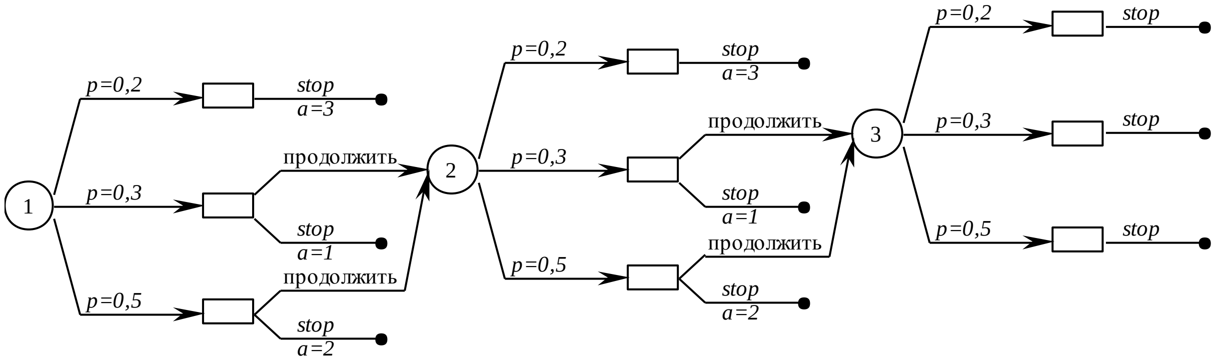
Рассмотрим пример оптимизации многоэтапных решений на примере экономической задачи.

Пример: фирма может принять решение о строительстве крупного или мелкого предприятия. Строительство крупного предприятия относительно дешевле, в случае если будет высокий спрос на производимые товары, мелкое предприятие можно расширить. Деятельность фирмы рассматривается в течение десяти лет, причём в случае строительства мелкого предприятия, вопрос о расширении будет рассматриваться через два года. Спрос заранее неизвестен.

Введём градацию спроса: высокий $(p > 0.75)$ и низкий $(p < 0.25)$. Затраты и доходы: строительство крупного предприятия – 5 млн. $; строительство мелкого – 1 млн. $; затраты на расширение – 4,2 млн. $; крупное предприятие при высоком спросе даёт доход – 1 млн. $ ежегодно, а при низком – 300 тыс. $; мелкое предприятие при высоком спросе – 250 тыс. $ ежегодно, при низком – 200 тыс. $; расширенное предприятие в случае высокого спроса приносит доход – 900 тыс. $ в год, и при низком спросе – 200 тыс. $; мелкое предприятие без расширения при высоком спросе на производимый продукт приносит в течение двух лет по 250 тыс. $ ежегодно, а в течение следующих восьми по 200 тыс. $. Нарисуем наше дерево.



Применим для решения этой задачи метод динамического программирования. В качестве критерия применим средний выигрыш, т. .е МО выигрыша. Сама величина критерия равна доходу без затрат на строительство. Начнём с последнего четвёртого шага: подсчитаем средний выигрыш:



$$\overline{a}^4_{расш} = (0{,}9*0{,}75 + 0{,}2*0{,}25)*8 - 4{,}2 = 1{,}6$$

$$\overline{a}^4_{без\ расш} = (0{,}25*0{,}75 + 0{,}2*0{,}25)*8 = 1{,}9$$

$$\overline{a}^1_{круп} = (1*0{,}75 + 0{,}3*0{,}25)*10 - 5{,}0 = 3{,}25$$

$$\overline{a}^1_{мелк} = (1{,}9 + 2*0{,}25)*0{,}75 + 0{,}2*10*0{,}25 = 1{,}3$$

Исходя из полученного результата, оптимальным будем сразу строить крупное предприятие.

Задача о секретарше.

Директор собирается принять на работу секретаршу. Прежний опыт делит секретарш на три категории: отличных (3 балла), хороших (2 балла) и посредственных (1 балл). Анализ учебных заведений по подготовке секретарш даёт статистику выпускниц заведений: вероятность взять на работу отличную секретаршу – 0,2, хорошую – 0,5, посредственную – 0,3. директор может испытать только трёх претенденток, причём в случае отказа директора кандидат убывает на другую работу. Построим дерево решений.

Начнём искать оптимальное решение с последнего шага. Определим МО «выигрыша» секретарши, если мы испытываем трёх кандидаток:

$$\overline{a}_3 = 3*0.2 + 2*0.5 + 1*0.3 = 1.9$$

$$\overline{a}_3 = 3*0.2 + 2*0.5 + 1.9*0.3 = 2.17$$

Во втором испытании, если попалась хорошая секретарша, надо остановиться, а в первом испытании, надо остановиться только если попалась отличная, а в третье испытании берём любую. Найдём средний оптимальный выигрыш после всех испытаний:

$$\overline{a}_{отл} = 3*0.2 + 2.17*0.5 + 2.17*0.3 = 2.336$$