Лекция 13

Задачи нелинейного и квадратичного программирования (продолжение)

1.Задачи целочисленного булева программирования.

Под задачей математического программирования понимается задача (1):

$$\text{extr } \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathbf{D} \text{ где } \mathbf{D} = \{\mathbf{x} \mid g_j(\mathbf{x}) \le \mathbf{0},\ j=1,2,...,n,\ \mathbf{x} \in \mathbf{Q},\ \mathbf{Q} \subseteq R^m\}.$$

Здесь g_j**(x),** j=1,2,...,n, и f(**x**) - произвольные функции, а extr - max или min. Функция f(**x**) называется целевой функцией, функционалом или критерием задачи (1), а D - множеством или областью допустимых решений задачи (1).

Среди задач типа (1) выделяют задачи, которые называют **регулярными.**

Для них:

- для каждого допустимого вектора **x, x** $\in$D, может быть определена непустая окрестность;

-можно указать достаточно эффективно проверяемые необходимые и достаточные условия локальной оптимальности, т.е. локальный оптимум может быть найден на множестве D при помощи конечного процесса (или бесконечного сходящегося);

-локальный оптимум целевой функции совпадает с глобальным.

Примерами регулярных задач являются задачи **выпуклого программирования** (функция f(**x**) - вогнута, а функции g(**x**) -выпуклые). Если функции f(**x**) и **g**(**x**) - линейные, то задача называется задачей **линейного программирования**.

Если область Q не является связной, то задача (1) называется **дискретной задачей математического программирования** или задачей **дискретного программирования**. Если функции f(**x**) и **g**(**x**) при этом являются линейными, то такая задача называется задачей **целочисленного линейного программирования**. Если компоненты вектора **x** могут принимать лишь значения 0 или 1, то такая задача называется задачей **целочисленного булева программирования**.

2. Каноническая и многомерная задачи о ранце и их интерпретации.

Содержательное описание.

Есть несколько “предметов” , о которых известны их “веса” и “полезности”. Задан “ранец” определённой грузоподъёмности. Требуется поместить в “ранец” “предметы” таким образом, чтобы они все “убрались” в “ранец” и суммарная “полезность” от них была максимальна.

Математическая модель.

Исходные параметры модели.

Пусть i=1,2,...,m - номера предметов, v(i) - “вес” “предмета” с номеров i, c(i) - “полезность” “предмета” с номером i, i=1,2,...,m, v(0) - “вместимость” “ранца”.

<u>Варьируемые параметры модели.</u>

Обозначим через **x** - m мерный вектор, элементы которого x(i)=1, если “предмет” с номером i будет помещен в “ранец” и x(i)=0, если “предмет” с номером i не будет помещен в “ранец”.

<u>Ограничения математической модели.</u>

$$\sum_{i=1}^{m} v(i)\,x(i) \le v(0)\,, \tag{1}$$

$$x(i) \in \{0,1\}, \tag{2}$$

Постановка оптимизационной задачи.

Критерий оптимальности для задачи о “ранце” имеет вид:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} c(i)\,x(i\,) \to \max\,. \tag{3}$$

Здесь ограничение (1) связано с вместимостью “ранца”, а условия (2) - естественные условия на введенные переменные.

Критерий (3) связан с максимализацией суммарной “полезности” от предметов, помещенных в “ранец”.

Задача (1) - (3) называется задачей о ранце (канонический случай).

Если кроме ограничения (1) по “весу” в задаче присутствуют подобные ограничения по другим характеристикам “предметов”, т.е. ограничения (1) преобразуются в (4):

$$\sum_{i=1}^{m} v(i,j)\,x(i) \le b(j)\,, \quad j=1,2,...,m\,, \tag{4}$$

где v(i,j) - есть j-ая характеристика “предмета” с номером i, i=1,2,...,m, j=1,2,...,n, а b(j) -”вместимость “ранца” по j-той характеристике, то задача (2), (3), (4) называется **многомерной задачей о ранце**.

С помощью математических моделей ранцевского типа описываются следующие прикладные задачи:

- задача загрузки уникального оборудования,
- задача формирования портфеля заказов, обеспеченного ресурсами,
- задача объемного планирования для предприятия,
- задачи загрузки контейнеров и др.

3. Задача коммивояжера и ее интерпретации.

<u>Содержательное описание.</u>

Бродячему торговцу (коммивояжеру) необходимо, начиная из выделенного города, обойти заданное количество городов и вернуться в начальный город, при этом в каждом городе коммивояжер должен побывать ровно один раз и суммарное пройденное им расстояние должно быть минимальным.

Математическая модель.

<u>Исходные параметры модели</u>

Пусть $i=0,1,2,...,m$ - номера городов, $i=0$ - номер выделенного города (начало и окончание маршрута).

Обозначим через $R=\| r(i,j) \|$ - $(m+1)(m+1)$ матрицу расстояний, элемент которой $r(i,j)$ - расстояние между городом с номером i и городом с номером j.

Варьируемые параметры модели.

Обозначим через $X=\| x(i,j) \|$ - $(m+1)(m+1)$ матрицу неизвестных, элемент которой $x(i,j)=1$, если коммивояжер из города с номером i переедет в город с номером j, $x(i,j) = 0$, в противном случае; $u(i)$ - специальные переменные, $i=1,2,...m$.

Ограничения математической модели.

$$\sum_{i=0}^{m} x(i,j) = 1, \quad j=1,2,...,m, \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{m} x(i,j) = 1, \quad i=1,2,...,m, \tag{2}$$

$$u(i) - u(j) + m\, x(i,j) \le m-1,\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,m,\ i \ne j., \tag{3}$$

$$x(i,j) \in \{0,1\}. \tag{4}$$

Здесь условия (1) означают, что коммивояжер ровно один раз въедет в каждый город (кроме города с номером 0); условия (2) означают, что коммивояжер ровно один раз выедет из каждого города (кроме города с номером 0), ограничения (3) означают существование лишь одного цикла, начинающегося в городе с номером 0, проходящего через все города и завершающегося в городе с номером 0; ограничения (4) являются естественными условиями на введенные переменные.

Покажем, что условия (3) являются необходимыми и достаточными условиями существования лишь одного цикла.

Действительно, пусть это не так и найдется подцикл с числом городов $k<m$, не проходящий через город с номером 0. Складывая все неравенства (3) при условиях, что $x(i,j)=1$ по городам подцикла, получим $mk \le (m-1)k$ (все $u(i)$ и $u(j)$ взаимно уничтожаются), что противоречит существованию подцикла длины $k<m$.

С другой стороны, покажем, что для цикла, проходящего через все города, начинающегося и заканчивающегося в городе с номером 0, найдутся величины $u(i)$, удовлетворяющие условиям (3).

Положим $u(i)=p$, если город с номером i будет посещен коммивояжером p-ым по порядку, $p=1,2,...,m$.

Пусть $x(i,j) = 0$. Тогда условия (3) примут вид:

$u(i) - u(j) \le m-1$, что верно, так как $p<m+1$ и $p>0$.

Пусть $x(i,j) = 1$. Тогда, так как если $u(i) = p$, то $u(j)=p+1$ (это следует из того, что город с номером j будет следующим в маршруте коммивояжера после города с номером i). Получим:

$u(i) - u(j) + m\, x(i,j) = p - (p+1) + m = m - 1$, что и доказывает правомочность присутствия в модели ограничений (3).

Постановка оптимизационной задачи.

Критерий оптимальности для задачи коммивояжера имеет вид:

$$F(X)= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} r(i,j)\, x(i,j) \to \min . \qquad (5)$$

Задача (1) - (5) называется задачей коммивояжера или задачей бродячего торговца.

С помощью рассмотренной математической модели описываются следующие прикладные задачи:

- задача минимизации времени переналадок уникального оборудования;
- задача развозки готовой продукции по потребителям;
- задача управления работой снегоочистительных машин и др.

4. Задачи о назначениях и их интерпретации.

Содержательное описание.

Есть несколько исполнителей и несколько работ. Задана производительность каждого исполнителя по каждой работе. Необходимо так распределить исполнителей по работам, чтобы каждый исполнитель получил не более одной работы, каждая работа получила не более одного исполнителя и суммарная производительность от сделанных назначений была максимальна.

Математическая модель.

Исходные параметры модели.

Пусть i=1,2,...,m - номера исполнителей, j=1,2,...,n - номера работ. Обозначим через $R=\| r(i,j) \|$ - mn матрицу производительностей, элемент которой r(i,j) - есть производительность исполнителя с номером i на работе с номером j.

Варьируемые параметры.

Обозначим через $X=\| x(i,j) \|$ - mn матрицу неизвестных, элемент которой x(i,j) принимает значение 1, если исполнитель с номером i будет назначен на работу с номером j, и значение 0, в противном случае.

Ограничения математической модели.

$$\sum_{i=1}^{m} x(i,j) \le 1, \qquad j=1,2,...,n. \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x(i,j) \le 1, \qquad i=1,2,...m. \qquad (2)$$

$$x(i,j) \in \{0,1\}, \qquad i=1,2,...m. \qquad j=1,2,...,n. \qquad (3)$$

Здесь ограничения (1) означают, что каждая работа будет назначена не более чем одному исполнителю, ограничения (2) означают, что каждый исполнитель может быть назначен не более чем на одну работу, а условия (3) являются естественными ограничениями на введенные переменные.

Постановка оптимизационной задачи.

Критерий оптимальности для задачи о назначениях имеет вид:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} r(i,j)\, x(i,j) \to \max. \qquad (4)$$

Задача (1) - (4) называется задачей о назначениях с аддитивным критерием оптимальности.

Если в качестве критерия оптимальности выбрать функционал

$$F(X) = \max r(i,j)\, x(i,j) \to \min, \qquad (5)$$

где max берется по всем i=1,2,...,m и всем j=1,2,...n, то такая задача (1)-(3) называется минимаксной задачей о назначениях.

Если в качестве критерия оптимальности выбрать функционал

$F(X) = \min r(i,j)\, x(i,j) \to \max,$ (6)

то задача (1)-(3), (6) **называется максиминной задачей о назначениях**.

Замечание.

Нетрудно показать (введением фиктивных исполнителей или фиктивных работ), что математическая модель (1)-(3) эквивалентна математической модели (7)-(9):

$$\sum_{i=1}^{m} x(i,j) = 1, \qquad j=1,2,...,n. \qquad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x(i,j) = 1, \qquad i=1,2,...m. \qquad (8)$$

$$x(i,j) \in \{0,1\}, \qquad i=1,2,...m. \qquad j=1,2,...,n, \qquad (9)$$

где m=n.

Рассмотрим следующие условия на введенные переменные:

$$0 \le x(i,j) \le 1,\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n. \qquad (10)$$

Исходя из того, что матрица ограничений условий (7) - (8) является абсолютно унимодулярной (целочисленная матрица называется абсолютно или вполне унимодулярной, если любой ее минор равен 1, -1 или 0), то любой опорный план математической модели (7), (8), (10) является целочисленным, отсюда вытекает эквивалентность математических моделей (1)-(3) и (7)-(9). Кроме того, так как из условий (7) и (8) и условий неотрицательности переменных, автоматически следует, что переменные не могут быть больше 0, исходная математическая модель (1) -(3) эквивалентна (с точки зрения поиска оптимального решения задачи о назначениях) математической модели с ограничениями (7) , (8), условиями m=n и ограничениями

$$0 \le x(i,j), \qquad i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n. \qquad (11)$$

С помощью рассмотренной математической модели описываются следующие прикладные задачи:

- задача назначения исполнителей по работам с целью максимизации суммарной производительности по выполняемым работам;
- задача о конвейере - распределение исполнителей по работам на конвейере так, чтобы время перемещения конвейера было минимально;
- задача распределения вознаграждения в наихудшем случае и др.

5. Задача целочисленного линейного программирования в общей постановке.

Математическая модель включает в себя систему линейных алгебраических ограничений, которые в матричной форме имеют вид (1) -(3):

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}\ , \tag{1}$$

$$\mathbf{0} \le \mathbf{x}\ , \tag{2}$$

$$x(i) \in \mathbf{Z}, \qquad i=1,2,...,m, \tag{3}$$

где **A** nm матрица ограничений задачи, **x** - m мерный вектор столбец неизвестных, **b** - n мерный вектор строка правых частей или свободных членов, **Z** - множество целых чисел.

В качестве критерия оптимальности выберем

$$F(\mathbf{x}) = (\mathbf{c},\mathbf{x}) \to \text{extr.} \tag{4}$$

Здесь **c** - m мерный вектор коэффициентов целевой функции, (**c**,**x**) -скалярное произведение векторов **c** и **x**.

Задача (1) - (4) называется задачей целочисленного линейного программирования в общей постановке в матричной форме.

6. Метод ветвей и границ.

Впервые этот метод был предложен в 1960 году для решения задачи целочисленного линейного программирования.

Для всей группы алгоритмов, вписывающихся в общую схему метода ветвей и границ, характерным является применение в их вычислительной схеме следующей основной идеи: последовательное использование конечности множества вариантов решений задачи и замена полного перебора сокращенным, направленным перебором.

Полного перебора удается избежать за счет отбрасывания “неперспективных” множеств вариантов, т.е. таких, которые заведомо не могут содержать решения “лучшего”, чем решения, оставшиеся в неотброшенном множестве.

В общей схеме метода эта идея реализуется путем последовательного разбиения всего множества допустимых решений на подмножества и построения оценок, позволяющих сделать вывод о том, какое из полученных подмножеств может быть отброшено без потери оптимального решения исходной задачи.

Основные понятия метода ветвей и границ.

Релаксация (переход в равновесное состояние) задачи - переход от исходной задачи к задаче с той же целевой функцией, но с другой областью допустимых решений, включающей в себя в качестве собственного подмножества множество допустимых решений исходной задачи.

Свойства, связывающие исходную задачу с ее релаксацией:

- если релаксация задачи не имеет решения, то и исходная задача решения не имеет,
- если оптимальное решение релаксационной задачи принадлежит множеству допустимых решений исходной задачи, то это решение является оптимальным и для исходной задачи,

- значение оптимума (значение критерия на оптимальном решении) исходной задачи на минимум (максимум) не меньше (не больше) значения оптимума релаксационной задачи.

Ветвление - разбиение всего множества допустимых решений на непересекающиеся подмножества.

Кандидат - задача, для которой необходимо провести процедуру ветвления.

Потомок - подзадача, полученная в результате ветвления кандидата.

Стратегия - порядок выбора задач кандидатов.

Рекорд -значение критерия, соответствующее наилучшему решению, полученному к данному этапу вычислений.

7. Общая схема метода ветвей и границ Джеффриона-Марстена.

Общая схема метода ветвей и границ Джеффриона-Марстена включает в себя следующие шаги:

Шаг 1.

Открыть список задач кандидатов, включив в него исходную задачу. Присвоить рекорду большое число (малое число) для задачи на минимум (для задачи на максимум).

Шаг 2.

Провести анализ задач кандидатов с целью выяснения его непустоты.

- если список не пуст, то перейти на следующий шаг 3,
- если список пуст, то решение задачи завершено: если значение рекорда не изменилось по сравнению с первоначальным, то задача не имеет решения, в противном случае - задача решена.

Шаг 3.

Выбрать, используя принятую стратегию, текущую задачу кандидата из списка всех кандидатов.

Шаг 4.

Выбрать релаксацию задачи кандидата.

Шаг 5.

Провести анализ задачи кандидата с целью выяснения наличия у неё допустимых решений:

- если множество допустимых решений задачи кандидата пусто, то перейти к шагу 2, исключив из списка рассматриваемую задачу кандидата.
- в противном случае проверить, есть ли у кандидата допустимое решение, лучше рекорда. Если есть, то перейти на шаг 6, если нет, то исключить эту задачу из списка и перейти к шагу 2.

Шаг 6.

Выяснить, получено ли оптимальное решение кандидата:

- если нет, то перейти к шагу 7.
- если да, то пересчитать значение нового рекорда, запомнить рекордное решение и перейти на шаг 2.

Шаг 7.

Продолжать поиск оптимального решения задачи кандидата ?

- если нет, то перейти к шагу 8,

- если да, то модифицировать релаксацию рассматриваемого кандидата и перейти к шагу 5.
Шаг 8.
Разветвить кандидата и включить его потомки в список кандидатов, исключив из списка самого кандидата. Перейти на шаг 2.
Замечание 1.
В рассматриваемой схеме есть два блока, которые могут быть реализованы различными способами:
- выбор очередного кандидата с использованием стратегии (шаг 3),
- модернизация релаксации (блок 7).
Конкретная реализация этих блоков зависит от специфики исходной задачи.
Замечание 2.
Основным преимуществом метода ветвей и границ по отношению к другим универсальным методам, является возможность из-за ограниченного времени решения задачи, в любой момент прервать решение, выбрав в качестве приближенного решения исходной задачи то решение, которое соответствует рекорду, найденному к моменту прекращения вычислений.

8. Решение канонической задачи о ранце методом ветвей и границ.

Процедура оценок.
В качестве релаксации задачи о ранце рассмотрим следующую задачу линейного программирования (здесь используются обозначения раздела 2.3):

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{v}(\mathrm{i})\,\mathrm{x}(\mathrm{i}) \le \mathrm{v}(0)\,, \tag{1}$$

$$0 \le \mathbf{x}(\mathrm{i}) \le 1, \quad \mathrm{i}=1,2,...,\mathrm{m}. \tag{2}$$

$$\mathrm{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{c}(\mathrm{i})\,\mathrm{x}(\mathrm{i}\,) \to \max\,. \tag{3}$$

Задачу (1) -(2) будем называть **непрерывной задачей о ранце**. Её решение может быть получено, например симплекс-методом, однако, специфика задачи позволяет для её решения предложить более эффективный алгоритм. Этот алгоритм основан на следующей теореме Данцига.
Непрерывную задачу о ранце назовем **приведенной,** если отношения величин c(i,j) (полезностей) к соответствующим величинам v(i,j) (весам) не возрастают с ростом номеров i (предметов). Очевидно, что любую задачу о ранце путем перенумерации предметов, можно сделать приведенной.
Теорема Данцига.
Оптимальное решение непрерывной приведенной задачи о ранце находится с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\mathrm{x}(\mathrm{i}) = \min\,(\,\mathrm{v}(\mathrm{i}), \mathrm{v}(0) - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{v}(\mathrm{j})\,\mathrm{x}(\mathrm{j}))/\mathrm{v}(\mathrm{i}), \quad \mathrm{i}=1,2,...,\mathrm{m}.$$

Пусть **x** - оптимальное решение непрерывной приведенной задачи. Тогда верхняя оценка V для исходной задачи о ранце находится следующим образом:
H= F(**x**). Если все коэффициенты c(i) , 1=1,2,...,m, целые числа (этого всегда можно добиться путем приведения указанных величин к общему

знаменателя), то верхняя оценка может быть уменьшена. Величина V тогда может определяться как целая часть от F(**x**).

Нижняя оценка так же находится с помощью оптимального решения непрерывной приведенной задачи о ранце, полученного с помощью рекуррентных соотношений из теоремы Данцига.

Пусть **y** - m мерный целочисленный вектор, который получается с использованием оптимального решения **x** непрерывной задачи о ранце следующим образом:

y(i) = x(i), если x(i) - целое, и y(i) = 0 в противном случае.

Тогда H = F(**y**) - является достижимой нижней оценкой, так как вектор **y** будет допустимым решением исходной (целочисленной) задачи о ранце.

Процедура ветвления.

Для задачи о ранце в качестве направления для ветвления выбирается направление, соответствующее переменной, которая является дробной в оптимальном решении непрерывной задачи о ранце. Если решение непрерывной задачи о ранце оказалось целочисленным, то в соответствующем направлении верхняя и нижняя оценки будут совпадать.

Если верхняя и нижняя оценки в некотором направлении совпали, то в этом направлении не требуется проводить дальнейшее ветвление, так как лучшее возможное в этом направлении решение уже найдено. Оно соответствует нижней оценке этого направления.

9. Решение многомерной задачи о ранце методом ветвей и границ.

Процедура оценок.

Рассмотрим многомерную задачу о ранце

$$\sum_{i=1}^{m} v(i,j)\, x(i) \le b(j)\,, \quad j=1,2,...,m\,, \tag{1}$$

$$x(i) \in \{0,1\}, \tag{2}$$

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} c(i)\, x(i\,) \to \max\,. \tag{3}$$

Назовем j-ой подзадачей о ранце задачу о ранце с ограничениями

$$\sum_{i=1}^{m} v(i,j)\, x(i) \le b(j)\,, \tag{4}$$

$$x(i) \in \{0,1\}, \tag{5}$$

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} c(i)\, x(i\,) \to \max\,. \tag{6}$$

Рассмотрим новые ограничения

$$0 \le \mathbf{x}(i) \le 1, \quad i=1,2,...,m. \tag{7}$$

Назовем j-ой непрерывной задачей о ранце задачу (4), (6), (7).

Для ее решения могут быть использованы рекуррентные соотношения теоремы Данцига (для этого задачу надо сделать проиведенной).

Пусть **x**(j) - оптимальное решение j-той непрерывной задачи. Тогда в качестве **верхней оценки** исходной многомерной целочисленной задачи о ранце можно взять величину

$$V = \min F(\mathbf{x}(j)), \tag{8}$$

где min берется по всем j=1,2,...,n.

Для уменьшения значения верхней оценки, в случае, когда все значения c(i), i=1,2,...,m, целые, можно взять целую часть правой части выражения (8).

Для определения **нижней оценки** рассмотрим m- мерный вектор **y**, с компонентами y(i) = 1, если все i -тые компоненты векторов **x**(j) равны 1 и y(i) = 0 в противном случае. Тогда нижняя оценка определяется величиной:

H= F(**y**).

Найденная таким образом нижняя оценка является достижимой, так как вектор **y** по построению является булевым и удовлетворяет всем ограничениям (1), т.е. является допустимым решением исходной целочисленной многомерной задачи о ранце.

Процедура ветвления.

В качестве направления для ветвления выбирается та переменная, которая является дробной в оптимальном решении непрерывной j-ой подзадачи о ранце, где j - номер той подзадачи, на котором достигается минимум выражения (8) при определении верхней оценки. Если такой переменной нет, то в качестве направления для ветвления может быть выбрана любая ещё не рассмотренная переменная.

2.10. Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ.

Процедура оценок.

Рассмотрим задачу коммивояжера, поставленную как задача частично целочисленного линейного программирования:

$$\sum_{i=0}^{m} x(i,j) = 1, \quad j=1,2,...,m, \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{m} x(i,j) = 1, \quad i=1,2,...,m, \tag{2}$$

$$u(i) - u(j) + m\, x(i,j) \le m-1,\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,m,\ i \ne j., \qquad 3)$$

$$x(i,j) \in \{0,1\}, \tag{4}$$

$$F(X)= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} r(i,j)\, x(i,j) \to \min . \tag{5}$$

В качестве релаксации рассмотрим задачу без условий (3). Эта задача является задачей о назначениях с аддитивным критерием. Как было показано в разделе 2.4. ограничения (4) в этой задаче могут быть заменены на условия

$$0 \le x(i,j), \quad i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n, \tag{6}$$

и задача (1), (2), (5), (6), как задача линейного программирования, может быть решена, например, симплекс-методом (в последующих разделах мы покажем как решать задачу о назначениях более эффективными чем симплекс-процедуры методами).

Пусть **X** - оптимальное решение задачи о назначениях (1), (2), (5), (6). Тогда в качестве **нижней оценки** может быть выбрана величина

$$H= F(\mathbf{X}). \tag{7}$$

Замечание.

Так как решение задачи о назначении требует значительных временных затрат, а решать такую задачу необходимо много раз, можно предложить другой, более эффективный, но менее точный способ определения нижней оценки.
В качестве нижней оценки можно выбрать величину S, равную сумме минимальных элементов по строкам матрицы расстояний или величину C, равную сумме минимальных элементов по столбцам. Так как величину нижней оценки необходимо пытаться увеличивать (тем самым уменьшается интервал возможных значений оптимума исходной задачи) , то в качестве нижней оценки можно взять максимальное значение величин S и C.
В качестве **верхней оценки** может быть выбрана величина значения критерия задачи (5) на любом допустимом решении задачи коммивояжера. Приведем в качестве примера следующий приближенный , так называемый “жадный” алгоритм решения, основанный на следующей стратегии выбора маршрута движения коммивояжера: коммивояжер из очередного города переходит в город, расстояние до которого минимально из тех городов, в которых коммивояжер еще не был (включая и город, из которого начал свой путь коммивояжер). Стратегии “жадных” алгоритмов могут быть различными, и для уменьшения значения верхней оценки можно выбирать минимальное среди значений функционала задачи, найденных при различных стратегиях выбора маршрута движения коммивояжера.
Процедура ветвления.
Ветвление выбирается по всем направлениям, еще не пройденным коммивояжером.

11. Решение задачи целочисленного линейного программирования методом ветвей и границ.

Процедура оценок.
Рассмотрим задачу целочисленного линейного программирования в общей постановке в матричной форме.

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \ , \tag{1}$$

$$\mathbf{0} \le \mathbf{x} \ , \tag{2}$$

$$x(i) \in \mathbf{Z}, \qquad i=1,2,...,m, \tag{3}$$

$$F(\mathbf{x}) = (\mathbf{c},\mathbf{x}) \ \to \text{extr}. \tag{4}$$

Не уменьшая общности будем считать, что все коэффициенты задачи целочисленные.
Пусть **x** - оптимальное решение исходной задачи, **y** - m мерный вектор, оптимальное решение задачи линейного программирования (1), (2), (4), которая естественно является релаксацией для исходной целочисленной задачи линейного программирования.
Пусть рассматриваемая задача является задачей на максимум (extr = max).
Тогда в качестве **верхней оценки** выбирается величина
V=F(**c**,**y**), а точнее целая часть этой величины.
Процедура определения **нижней оценки** для общей задачи целочисленного линейного программирования обычно не определена и считается, что нижняя

оценка появляется лишь тогда, когда оптимальное решение непрерывной задачи линейного программирования оказывается целочисленным.

Процедура ветвления.

Если среди компонент вектора **y** нет дробных, то в этом направлении ветвление прекращается, т.к. лучшее решение в этом направлении исходной задачи определяется целочисленным вектором **y**. Пусть y(i) - некоторая дробная компонента. Ветвление происходит в направлении этой компоненты следующим образом. Пусть y(i) = [y(i)] + {y(i)}, где [s] - целая часть числа s, а {s} - дробная часть числа s. Тогда подзадачами, порожденными этим направлением, будут две задачи линейного программирования, к исходным ограничениям первой из которых добавляется ограничение x(i) $\le$[y(i)], а к исходным ограничениям второй задачи добавляется ограничение

[y(i)] + 1 $\le$ x(i).

12. Решение задачи о ранце с использованием табличной схемы.

Рассмотрим задачу о ранце

$$\sum_{i=1}^{m} v(i)\, x(i) \le v(0)\,, \qquad (1)$$

$$x(i) \in \{0,1\}, \qquad (2)$$

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} c(i)\, x(i) \to \max\,. \qquad (3)$$

Не уменьшая общности будем предполагать, что все параметры задачи целые неотрицательные числа.

Обозначим через **Z**(k,p) - задачу (1) - (3), при условиях, что предметов k, k $\le$ m, а вместимость ранца p, p $\le$v(0). Пусть R(k,p) - оптимум задачи Z(k,p). Тогда, очевидно, что оптимум исходной задачи (1) -(3) совпадает с оптимумом задачи Z(m,v(0)) и равен R(m,v(0)). Для определения величины R(m,v(0)) можно построить следующие рекуррентные соотношения:

$$R(k+1,p) = R(k,p)\text{ , если } v(k+1) > p, \qquad (4)$$

R(k+1, p) = max { R(k,p), c(k+1) + R(k, p- v(k+1)}, если p> v(k+1) + 1.

Рекуррентные соотношения (4), с учетом граничных условий

$$R(1,p) = 0\text{, если } c(1) > p, \qquad (5)$$

R(1,p) = c(1), если c(1) < p+1,

могут быть использованы для решения исходной задачи о ранце.

Замечание.

Результаты вычислений по рекуррентным соотношениям (4), (5) удобно представить в виде таблицы с m строками и v(0) столбцами (отсюда и название метода), в которой приводятся значения соответствующих величин R(k,p). Для того чтобы решить исходную задачу о ранце необходимо заполнить клетку таблицы с координатами: m - тая строки и столбец с номером v(0). Для этого не требуется заполнить все m v(0) клеток таблицы, а лишь те, которые используются для вычисления значений величины R(m,v(0)).

2.13. Решение задачи о ранце с использованием рекуррентных соотношений динамического программирования.

Рассмотрим задачу о ранце

$$\sum_{i=1}^{m} v(i)\, x(i) \le v(0)\ , \qquad (1)$$

$$x(i) \in \{0,1\}, \qquad (2)$$

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} c(i)\, x(i\ ) \to \max\ . \qquad (3)$$

Пусть G={1,2,...,m} - множество номеров предметов.
Обозначим через W(G', p) - суммарную полезность тех предметов, которые будут положены в ранец из предметов множества G', при вместимости ранца p, и наилучшем способе выбора предметов (с точки зрения функционала задачи),

$G' \subseteq G$, $p<v(0) + 1$.

Обозначим через $S = \{\ i/\ c(i) < p+1,\ i \in G'\}$.

Тогда

$$W(G',p) = \max\ [\ c(i) + W(G'\backslash\{i\},\ p - v(i)], \qquad (4)$$

где максимум берется по предметам из множества S.
Рекуррентные соотношения (4), с учетом граничных условий:
W(G',p) = 0, если S - пустое множество.

14. Решение задачи коммивояжера с использованием рекуррентных соотношений динамического программирования.

Рассмотрим задачу коммивояжера:

$$\sum_{i=0}^{m} x(i,j) =1, \quad j=1,2,...,m, \qquad (1)$$

$$\sum_{j=0}^{m} x(i,j) =1, \quad i=1,2,...,m, \qquad (2)$$

$$u(i) - u(j)\ +\ m\, x(i,j) \le m\text{-}1,\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,m,\ i \ne j., \qquad (3)$$

$$x(i,j) \in \{0,1\}. \qquad (4)$$

$$F(X)= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} r(i,j)\, x(i,j) \to \min\ . \qquad (5)$$

Пусть G = {0,1,...m} - множество городов.
Обозначим через W(G', i) - расстояние, которое пройдет коммивояжер из города с номером i через все города множества G' в начальный город с номером 0, $G' \subseteq G$, $i \in G\backslash G'$ при оптимальном выборе маршрута (с точки зрения критерия задачи коммивояжера). Тогда

$$W(G',i) = \min\ [\ r(i,j) + W(G'\backslash\{i\},\ j)], \qquad (6)$$

где минимум берется по всем городам с номерами $j \in G'$.
Рекуррентные соотношения (6), используя граничные условия:

$$W(G',i) = r(i,0),\ \text{если } G' \text{ - пустое множество}, \qquad (7)$$

могут быть использованы для решения задачи коммивояжера (1) -(5).