Лекция 14

Задачи нелинейного и квадратичного программирования (продолжение)

1. Задачи теории расписаний.

Изучением вопросов оптимального планирования и управления на сетевых структурах занимается **теория расписаний** - раздел дискретного программирования. Задачи теории расписаний как правило трудноразрешимы, хотя для некоторых из них существуют эффективные алгоритмы решения. К задачам теории расписаний относятся :

-**задачи упорядочения** - минимизации функций на перестановках,

-**задачи согласования** - определение длительностей выполнения работ при конфликтующих потребностях работ в ресурсах,

-**задачи распределения** - при альтернативных технологиях выполнения работ.

Мы в дальнейшем будем рассматривать лишь задачи теории расписаний, связанные с упорядочением работ.

2. Задачи теории расписаний с одним обслуживающим прибором.

Общая постановка.

Пусть имеется n заявок на обслуживание. Они обслуживаются одним прибором, соответственно, за t(1), t(2),...,t(n) единиц времени. Предполагается, что все заявки пришли в систему одновременно и ожидают обслуживания. Пусть f(i,t) - функция штрафов за простой заявки с номером i, если её обработка завершится в момент времени t. Пусть **r**=(i(1),i(2),...,i(n)) - перестановка из n натуральных чисел {1,2,...,n}, которая определяет порядок обработки заявок. Пусть P -множество всех таких различных перестановок. Очевидно, что мощность этого множества есть n!. Обозначим через F(**r**) - суммарный штраф, получаемый за обработку заявок в порядке, определяемом перестановкой **r**. Тогда

$$F(\mathbf{r}) = f(i(1),t(i(1))) + f(i(2), t(i(1)+t(i(2))) +...+f(i(n), t(i(1)) + t(i(2)) +...+t(i(n))).$$

При такой формализации задача одного обслуживающего прибора ставится как задача поиска такой перестановки из множества P, на которой достигает минимальное значение критерий задачи F.

Примеры задач одного обслуживающего прибора.

Задача директора.

Содержательное описание.

На прием к директору записалось несколько человек. Зная время на прем каждого, требуется в таком порядке принимать посетителей, чтобы суммарное время проведенное посетителями на приеме было минимально.

Математическая модель.

Исходные параметры модели.

Пусть i=1,2,...,m -номера посетителей, t(i) - время, необходимое на обслуживание посетителя с номером i, i=1,2,...,m. Функции штрафов имеют вид

f(i,t) = t, i=1,2,...,m.

Варьируемые параметры.

Обозначим через **r**=(i(1),i(2),...,i(n)) - перестановку из n натуральных чисел, определяющую порядок приема посетителей. Через P - обозначим множество всевозможных перестановок натуральных чисел {1,2,...,m}.

Ограничения математической модели.

$$\mathbf{r} \in P . \tag{1}$$

Постановка оптимизационной задачи.

Критерий оптимальности для задачи директора имеет вид:

$$F(\mathbf{r}) = mt(i.1) + (m-1)t(i,2) + ...+ t(i,m) \rightarrow \min \tag{2}$$

Задача мастера.

Содержательное описание.

Мастер, придя на работу, обнаружил неисправными несколько станков. Имея в своем распоряжении одну ремонтную бригаду, требуется определить такой порядок ремонта станков (потери от простоя станков различны и зависят от производительностей станков такой), чтобы суммарные потери от простоя станков были минимальны.

Математическая модель.

Исходные параметры модели.

Пусть i=1,2,...,m -номера станков, t(i) - время, необходимое на ремонт станка с номером i, i=1,2,...,m. Функции штрафов имеют вид

f(i,t) = c(i)t, i=1,2,...,m.

Варьируемые параметры.

Обозначим через **r**=(i(1),i(2),...,i(n)) - перестановку из n натуральных чисел, определяющую порядок ремонта станков. Через P - обозначим множество всевозможных перестановок натуральных чисел {1,2,...,m}.

Ограничения математической модели.

$\mathbf{r} \in P$.

Постановка оптимизационной задачи.

Критерий оптимальности для задачи мастера имеет вид:

$F(\mathbf{r}) = c(i(1))t((i),1) + c(i(2))[t(i(1))+t(i(2))]+...+c(i(m))[t(i(1))+t(i(2))+...+t(i(m))] \rightarrow \min$.

3. Перестановочный прием в задачах теории расписаний.

Случай линейных функций штрафов.

Пусть в задаче одного обслуживающего прибора функции штрафов линейные и имеют вид

f(i,t)=c(i)t, i=1,2,...,m.

Рассмотрим две перестановки **r** =(1,2,...,m) и **q**=(1,2,...,i-1,i+1,i,...,m), т.е. в них поменяли местами i и i+1 заявки на обслуживание.

Тогда, нетрудно показать, что

$F(\mathbf{r}) - F(\mathbf{q}) = c(i+1)\, t(i) - c(i)\, t(i+1)$.

Если $c(i+1)\ t(i) > c(i)\ t(i+1)$, то $F(\mathbf{r}) > F(\mathbf{q})$ и с номером $i+1$ необходимо обслуживать раньше заявки с номером i.
Отсюда следует алгоритм определения оптимальной (с точки зрения критерия задачи одного обслуживающего прибора) перестановки:
заявки необходимо обрабатывать в порядке неубывания отношений коэффициентов штрафов $c(i)$ к временам обслуживания заявок $t(i)$.
Отсюда, из $m!$ различных перестановок эффективно строится перестановка, на которой значение критерия оптимальности минимально.
Пусть $G(i,j,t)$ - величина штрафа за выполнение заявок начиная с момента времени t в порядке - сначала заявка с номером i, а затем заявка с номером j.
Обозначим через $R(i,j,t) = G(i,j,t) - G(j,i,t)$.
Говорят, что задача теории расписаний решается с помощью **перестановочного приема**, если по исходным параметрам задачи можно найти некоторые константы , по ним заявки упорядочить и найти оптимальную перестановку.
Оказывается, что если знак величины $R(i,j,t)$ не зависит от t, то к задаче может быть применен перестановочный прием.
Для задачи директора и задачи мастера перестановочный прием применим.

4. Теорема Лившица-Кладова.

Следующие классы функций:
- $f(i,t) = c(i)\ t + b(i)$, $a>0$, $i=1,2,...,m$,
- $f(i,t) = c(i) \exp(at) + b(i)$, $i=1,2,...,m$, $(a>0)$,
- $f(i,t)$ - монотонно-возрастающие функции, $i=1,2,...,m$,

являются единственной совокупностью функций, для которых применим перестановочный прием.

5. Задачи теории расписаний в общей постановке.

Содержательное описание.
Есть несколько деталей, которые проходят обработку на станках. Задана матрица технологических маршрутов, определяющая порядок обработки деталей на станках, и матрица трудоемкостей, определяющая времена обработки деталей на станках.
Допустимым расписанием обработки деталей на станках назовем порядок обработки деталей на станках, при котором одновременно на одном станку не может обрабатываться более одной детали, деталь может начинать обработку на очередном станке лишь после того, как её обработка закончилась на предшествующем по технологии станке, и обработка деталей на станках происходит без перерывов до полного выполнения соответствующих операций.
Требуется найти такое допустимое расписание, время завершения выполнения всех операций для которого минимально.
Математическая модель.
Исходные параметры модели.
Пусть $i=1,2,...,m$, - номера станков, $j=1,2,...,n$ - номера деталей.

Обозначим через $R=\| r(i,j) \|$ - mn матрицу технологических маршрутов, элемент которой r(i,j) - номер по порядку обработки детали с номером j на станке с номером i (элемент множества $\{1,2,...,m\}$).
Обозначим через $T = \| t(i,j) \|$ - mn матрицу трудоемкостей, элемент которой t(i,j) - время выполнения работы с номером j на станке с номером i.
Варьируемые параметры.
Пусть $X=\| x(i,j) \|$ mn матрица неизвестных, элемент которой x(i,j) - время начала выполнения детали с номером j на станке с номером i.
Пусть $Y=\| y(i,j) \|$ mn матрица неизвестных, элемент которой y(i,j) - время окончания выполнения детали с номером j на станке с номером i.
Пусть $Z=\| z(i,j) \|$ mn матрица неизвестных, элемент которой z(i,j) - номер по порядку (в расписании) обработки детали j на станке i.
Ограничения математической модели.

$$x(i,j) \geq y(k,j), \text{ для всех } k, \text{ для которых } r(i,j) > r(k,j),\ i,k=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n. \quad (1)$$

$$y(i,j) = x(i,j) + t(i,j), \quad i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n. \quad (2)$$

$$x(i,j) \geq y(i,k), \text{ если } z(i,j) > z(i,k),\ i=1,2,...,m,\ j,k=1,2,...,n. \quad (3)$$

$$x(i,j) \geq 0,\ y(i,j) \geq 0, \quad i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n. \quad (4)$$

$z(i,j) \in \{1,2,...,n\}$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$.
Здесь ограничения (1) означают, что начало обработки детали с номером j на станке с номером i может наступить не раньше, чем завершится обработка этой детали на всех станках, предшествующих для этой детали станку с номером i.
Ограничения (2) означают, что обработка деталей на станках происходит без перерывов.
Ограничения (3) означают, что начало обработки детали с номером j на станке с номером i может наступить не раньше, чем на этом станке завершится обработка предшествующих по расписанию деталей.
Ограничения (4) являются естественными условиями на введенные переменные.
Постановка оптимизационной задачи.
В качестве критерия оптимальности для задачи теории расписаний в общей постановке выбирается функционал

$$F(X,Y,Z) = \max z(i,j) \to \min, \quad (5)$$

где max берется по всем i, i=1,2,...,m, и j, j=1,2,...,n.
Критерий (5) означает минимизацию времени завершения обработки деталей на станках.

6. Задача Джонсона. Графики Ганта.

Если порядок обработки деталей на станках одинаков, то такие задачи называются задачами Джонсона (по имени американского математика С.М. Джонсона, изучавшего такие задачи). В этих задачах, не уменьшая общности, предполагается, что порядок обработки каждой детали совпадает с естественной нумерацией станков. Среди задач Джонсона особая роль принадлежит задачам с двумя обслуживающими приборами (двумя

станками), для которых Джонсон разработал эффективный алгоритм решения.
Пусть j=1,2,...,n - номера деталей, A(j) и B(j) , соответственно, времена обработок детали с номером j на первом и втором станках, j=1,2,...,n.
Обозначим через x(j) - время простоя второго станка непосредственно перед началом обработки детали с номером j, j=1,2,...,n.
Тогда критерием оптимальности задачи Джонсона с двумя станками станет функционал

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} x(j) \to \min.$$

Нетрудно показать, расписание обработки деталей на станках задается перестановкой **r** натуральных чисел из множества {1,2,...,n}. Если **r**=(1,2,...,n). то x(1)=A(1), x(2)= max {A(1)+A(2) - B(1) - x(1), 0}, ...,

$\sum_{j=1}^{n}$ x(j) = max {A(1)+...+A(n) - B(1)-...-B(n-1),...,A(1)+...+A(j) - B(1)-...-B(j-1), ...,
A(1)}.
Пусть **r** и **q** две перестановки
r=(1,2,...,n), **q**=(1,2,...,j-1,j+1,j,...,n).
Пусть F(**r**)<F(**q**). Тогда
max{A(1)+A(2)+...+A(j) - B(1)-B(2)-...-B(j-1), A(1)+A(2)+...+A(j+1) - B(1)-B(2)-...-B(j)}<max{A(1)+A(2)+...+A(j-1)+A(j+1) - B(1)-B(2)-...-(j-1), A(1)+A(2)+...+A(j+1) - B(1)-B(2)-... B(j-1)-B(j+1)}. (1)
Вычтем из левой и правой частей неравенства (1) величину A(1)+A(2)+...A(j+1) - B(1)-B(2)-...-B(j-1).
Получим, после несложных преобразований,

$$\min\{A(j+1), B(j)\} > \min\{A(j), B(j+1)\}. \qquad (2)$$

Отсюда работа j выполняется раньше работы j+1, если выполняется условие (2).
Вышедоказанное позволяет сформулировать алгоритм Джонсона построения оптимального расписания выполнения работ на двух станках:
Шаг 1. Найти минимальную величину среди A(j) и B(j), j=1,2,...,n.
Шаг 2. Если минимум достигается на A(j), то деталь с номером j ставится на обработку самой первой, если на B(j), то деталь с номером j ставится на обработку последней, деталь с номером j исключается из рассмотрения, и процесс построения расписания продолжается с шага 1.
Построенные расписания наглядно отображаются с помощью так называемых **графиков Ганта** или **Гант-карт**.
График Ганта - это графическое отображения расписания, в котором каждому станку соответствует своя ось времени.

7. Постановка задачи теории расписаний как задачи частично-целочисленного линейного программирования.

Как и в разделе 2.19. пусть i=1,2,...,m, - номера станков, j=1,2,...,n - номера деталей, R=‖ r(i,j) ‖ - mn матрица технологических маршрутов, элемент которой $r(i,j)$ - есть номер по порядку обработки детали с номером j на станке с номером i (элемент множества $\{1,2,...,m\}$), $T = \| t(i,j) \|$ - mn матрица трудоемкостей, элемент которой $t(i,j)$ - означает время выполнения работы с номером j на станке с номером i.

В качестве варьируемых параметров математической модели выберем:

$X=\| x(i,j) \|$ - mn матрицу неизвестных, элемент которой $x(i,j)$ означает время начала обработки детали с номером j на станке с номером i, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$;

$y(i,j,k)=1$, если на станке с номером i деталь с номером j обрабатывается раньше детали с номером k ,

$y(i,j,k)=0$, если на станке с номером i деталь с номером k обрабатывается раньше детали с номером j;

t - вспомогательная переменная, определяющая время завершения выполнения всех работ.

Ограничения математической модели.

$x(i,j) - x(i,k) \geq t(i,k)$ или $k(i,k) - x(i,j) \geq t(i,j)$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$. (1)

Одновременно на станке i не могут выполняться работы с номерами j и k.

$x(i,j) - x(k,j) \geq t(k,j)$, если $r(k,j) < r(i,j)$, $i,k=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$. (2)

Деталь с номером j переходит на обработку следующий станок лишь после того, как она пройдет полную обработку на предшествующем по технологии станке.

$$x(i,j) + t(i,j) \leq t. \quad (3)$$

Общее время завершения выполнения всех работ не превышает величины t.

$$x(i,j) \geq 0, \quad i=1,2,...,m, \ j=1,2,...,n. \quad (4)$$

Естественные ограничения на введенные переменные.

В построенной модели не формализованными являются условия (1).

Для формализации условий (1) введем параметр Q -достаточно большое число.

Тогда рассмотрим ограничения (1’):

$(Q + t(i,k))y(i,j,k)+ x(i,j)- x(i,k) \geq t(i,k)$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,n$, $j \neq k$.

$(Q + t(i,j))(1-y(i,j,k))+ x(i,k)- x(i,j) \geq t(i,j)$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,n$, $j \neq k$.

Покажем, что эти условия эквивалентны условиям (1):

- пусть $x(i,j) = x(i,k)$,

тогда если $y(i,j,k) = 1$, то из (1’) получаем :

$Q+t(i,k) + x(i,j) -x(i,k)= Q + t(i,k) \geq t(i,k)$, что всегда верно,

$x(i,k)- x(i,j) = 0 \geq t(i,j)$, т.е. $t(i,j) \leq 0$, т.е. $t(i,j) = 0$, а это означает, что деталь с номером i не проходит обработку на станке j,

если $y(i,j,k) = 0$, то $t(i,k)=0$, т.е. деталь с номером j не обрабатывается на станке i;

- пусть $x(i,j) > x(i,k)$, т.е. деталь с номером j выполняется после детали k, т.е. $y(i,j,k)= 0$, тогда из условий (1’) получим $x(i,j) - x(i,k) \geq t(i,k)$, т.е. условия (1) выполняются;

- пусть $x(i,j) < x(i,k)$, т.е. деталь с номером j выполняется раньше детали k, т.е. $y(i,j,k)= 1$, тогда из условий (1') получим :
$Q+x(i,j) \geq x(i,k)$, что всегда верно,
$x(i,k) - x(i,j) \geq t(i,j)$, т.е. условия (1) выполняются.
Таким образом математическая модель приобретает вид (1'), (2), (3), (4), и к ней добавляются естественные условия на переменные:
$y(i,j,k) \in \{0,1\}$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,n$. (5)
Постановка оптимизационной задачи.
В качестве критерия оптимальности выбирается функционал
$F(t) = t \rightarrow \min$. (6)
Полученная задача (1'), (2) - (6) является задачей частично-целочисленного линейного программирования с числом ограничений $M=mn(n+m-1)+1$ и числом переменных $N=mn(n+1)/2 +1$.

8. Задачи теории расписаний.

Изучением вопросов оптимального планирования и управления на сетевых структурах занимается **теория расписаний** - раздел дискретного программирования. Задачи теории расписаний как правило трудноразрешимы, хотя для некоторых из них существуют эффективные алгоритмы решения. К задачам теории расписаний относятся :
-**задачи упорядочения** - минимизации функций на перестановках,
-**задачи согласования** - определение длительностей выполнения работ при конфликтующих потребностях работ в ресурсах,
-**задачи распределения** - при альтернативных технологиях выполнения работ.
Мы в дальнейшем будем рассматривать лишь задачи теории расписаний, связанные с упорядочением работ.

2.16. Задачи теории расписаний с одним обслуживающим прибором.

<u>Общая постановка.</u>
Пусть имеется n заявок на обслуживание. Они обслуживаются одним прибором, соответственно, за $t(1)$, $t(2),...,t(n)$ единиц времени. Предполагается, что все заявки пришли в систему одновременно и ожидают обслуживания. Пусть $f(i,t)$ - функция штрафов за простой заявки с номером i, если её обработка завершится в момент времени t. Пусть $\mathbf{r}=(i(1),i(2),...,i(n))$ - перестановка из n натуральных чисел $\{1,2,...,n\}$, которая определяет порядок обработки заявок. Пусть P -множество всех таких различных перестановок. Очевидно, что мощность этого множества есть n!. Обозначим через $F(\mathbf{r})$ - суммарный штраф, получаемый за обработку заявок в порядке, определяемом перестановкой $\mathbf{r}$. Тогда
$F(\mathbf{r}) = f(i(1),t(i(1))) + f(i(2), t(i(1)+t(i(2))) +...+f(i(n), t(i(1)) + t(i(2)) +...+t(i(n)))$.
При такой формализации задача одного обслуживающего прибора ставится как задача поиска такой перестановки из множества P, на которой достигает минимальное значение критерий задачи F.
Примеры задач одного обслуживающего прибора.

Задача директора.

<u>Содержательное описание.</u>

На прием к директору записалось несколько человек. Зная время на прем каждого, требуется в таком порядке принимать посетителей, чтобы суммарное время проведенное посетителями на приеме было минимально.

Математическая модель.

Исходные параметры модели.

Пусть i=1,2,...,m -номера посетителей, t(i) - время, необходимое на обслуживание посетителя с номером i, i=1,2,...,m. Функции штрафов имеют вид

f(i,t) = t, i=1,2,...,m.

Варьируемые параметры.

Обозначим через **r**=(i(1),i(2),...,i(n)) - перестановку из n натуральных чисел, определяющую порядок приема посетителей. Через P - обозначим множество всевозможных перестановок натуральных чисел {1,2,...,m}.

Ограничения математической модели.

$$\mathbf{r} \in P . \qquad (1)$$

Постановка оптимизационной задачи.

Критерий оптимальности для задачи директора имеет вид:

$$F(\mathbf{r}) = mt(i.1) + (m-1)t(i,2) + ...+ t(i,m) \rightarrow \min. \qquad (2)$$

Задача мастера.

Содержательное описание.

Мастер, придя на работу, обнаружил неисправными несколько станков. Имея в своем распоряжении одну ремонтную бригаду, требуется определить такой порядок ремонта станков (потери от простоя станков различны и зависят от производительностей станков такой), чтобы суммарные потери от простоя станков были минимальны.

Математическая модель.

Исходные параметры модели.

Пусть i=1,2,...,m -номера станков, t(i) - время, необходимое на ремонт станка с номером i, i=1,2,...,m. Функции штрафов имеют вид

f(i,t) = c(i)t, i=1,2,...,m.

Варьируемые параметры.

Обозначим через **r**=(i(1),i(2),...,i(n)) - перестановку из n натуральных чисел, определяющую порядок ремонта станков. Через P - обозначим множество всевозможных перестановок натуральных чисел {1,2,...,m}.

Ограничения математической модели.

$\mathbf{r} \in P$.

Постановка оптимизационной задачи.

Критерий оптимальности для задачи мастера имеет вид:

$$F(\mathbf{r}) = c(i(1))t((i),1) + c(i(2))[t(i(1))+t(i(2))]+...+c(i(m))[t(i(1))+t(i(2))+...+t(i(m))] \rightarrow \min.$$

9. Перестановочный прием в задачах теории расписаний.

Случай линейных функций штрафов.

Пусть в задаче одного обслуживающего прибора функции штрафов линейные и имеют вид

f(i,t)=c(i)t, i=1,2,...,m.

Рассмотрим две перестановки **r** =(1,2,...,m) и **q**=(1,2,...,i-1,i+1,i,...,m), т.е. в них поменяли местами i и i+1 заявки на обслуживание.
Тогда, нетрудно показать, что
F(**r**) - F(**q**) = c(i+1) t(i) - c(i) t(i+1).
Если c(i+1) t(i) > c(i) t(i+1), то F(**r**) > F(**q**) и заявку с номером i+1 необходимо обслуживать раньше заявки с номером i.
Отсюда следует алгоритм определения оптимальной (с точки зрения критерия задачи одного обслуживающего прибора) перестановки:
заявки необходимо обрабатывать в порядке неубывания отношений коэффициентов штрафов c(i) к временам обслуживания заявок t(i).
Отсюда, из m! различных перестановок эффективно строится перестановка, на которой значение критерия оптимальности минимально.
Пусть G(i,j,t) - величина штрафа за выполнение заявок начиная с момента времени t в порядке - сначала заявка с номером i, а затем заявка с номером j.
Обозначим через R(i,j,t) = G(i,j,t) - G(j,i,t).
Говорят, что задача теории расписаний решается с помощью **перестановочного приема**, если по исходным параметрам задачи можно найти некоторые константы , по ним заявки упорядочить и найти оптимальную перестановку.
Оказывается, что если знак величины R(i,j,t) не зависит от t, то к задаче может быть применен перестановочный прием.
Для задачи директора и задачи мастера перестановочный прием применим.

10. Теорема Лившица-Кладова.

Следующие классы функций:
- f(i,t) = c(i) t + b(i), a>0, i=1,2,...,m,
- f(i,t) = c(i) exp(at) + b(i), i=1,2,...,m, (a>0),
- f(i,t) - монотонно-возрастающие функции, i=1,2,...,m,

являются единственной совокупностью функций, для которых применим перестановочный прием.

11. Задачи теории расписаний в общей постановке.

<u>Содержательное описание.</u>
Есть несколько деталей, которые проходят обработку на станках. Задана матрица технологических маршрутов, определяющая порядок обработки деталей на станках, и матрица трудоемкостей, определяющая времена обработки деталей на станках.
Допустимым расписанием обработки деталей на станках назовем порядок обработки деталей на станках, при котором одновременно на одном станку не может обрабатываться более одной детали, деталь может начинать обработку на очередном станке лишь после того, как её обработка закончилась на предшествующем по технологии станке, и обработка деталей на станках происходит без перерывов до полного выполнения соответствующих операций.
Требуется найти такое допустимое расписание, время завершения выполнения всех операций для которого минимально.
Математическая модель.

Исходные параметры модели.
Пусть $i=1,2,...,m$, - номера станков, $j=1,2,...,n$ - номера деталей.
Обозначим через $R=\| r(i,j) \|$ - mn матрицу технологических маршрутов, элемент которой $r(i,j)$ - номер по порядку обработки детали с номером j на станке с номером i (элемент множества $\{1,2,...,m\}$).
Обозначим через $T = \| t(i,j) \|$ - mn матрицу трудоемкостей, элемент которой $t(i,j)$ - время выполнения работы с номером j на станке с номером i.
Варьируемые параметры.
Пусть $X=\| x(i,j) \|$ mn матрица неизвестных, элемент которой $x(i,j)$ - время начала выполнения детали с номером j на станке с номером i.
Пусть $Y=\| y(i,j) \|$ mn матрица неизвестных, элемент которой $y(i,j)$ - время окончания выполнения детали с номером j на станке с номером i.
Пусть $Z=\| z(i,j) \|$ mn матрица неизвестных, элемент которой $z(i,j)$ - номер по порядку (в расписании) обработки детали j на станке i.
Ограничения математической модели.

$$x(i,j) \ge y(k,j) \text{ , для всех k, для которых } r(i,j) > r(k,j),\ i,k=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n. \quad (1)$$

$$y(i,j) = x(i,j) + t(i,j), \quad i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n. \quad (2)$$

$$x(i,j) \ge y(i,k) \text{ , если } z(i,j) > z(i,k),\ i=1,2,...,m,\ j,k=1,2,...,n. \quad (3)$$

$$x(i,j) \ge 0,\ y(i,j) \ge 0, \quad i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n. \quad (4)$$

$z(i,j) \in \{1,2,...,n\}$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$.
Здесь ограничения (1) означают, что начало обработки детали с номером j на станке с номером i может наступить не раньше, чем завершится обработка этой детали на всех станках, предшествующих для этой детали станку с номером i.
Ограничения (2) означают, что обработка деталей на станках происходит без перерывов.
Ограничения (3) означают, что начало обработки детали с номером j на станке с номером i может наступить не раньше, чем на этом станке завершится обработка предшествующих по расписанию деталей.
Ограничения (4) являются естественными условиями на введенные переменные.
Постановка оптимизационной задачи.
В качестве критерия оптимальности для задачи теории расписаний в общей постановке выбирается функционал

$$F(X,Y,Z) = \max z(i,j) \to \min, \quad (5)$$

где max берется по всем i, $i=1,2,...,m$, и j, $j=1,2,...,n$.
Критерий (5) означает минимизацию времени завершения обработки деталей на станках.

12. Задача Джонсона. Графики Ганта.

Если порядок обработки деталей на станках одинаков, то такие задачи называются задачами Джонсона (по имени американского математика С.М. Джонсона, изучавшего такие задачи). В этих задачах, не уменьшая общности, предполагается, что порядок обработки каждой детали совпадает с естественной нумерацией станков. Среди задач Джонсона особая роль принадлежит задачам с двумя обслуживающими приборами (двумя станками), для которых Джонсон разработал эффективный алгоритм решения.

Пусть j=1,2,...,n - номера деталей, A(j) и B(j) , соответственно, времена обработок детали с номером j на первом и втором станках, j=1,2,...,n.

Обозначим через x(j) - время простоя второго станка непосредственно перед началом обработки детали с номером j, j=1,2,...,n.

Тогда критерием оптимальности задачи Джонсона с двумя станками станет функционал

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} x(j) \rightarrow \min.$$

Нетрудно показать, расписание обработки деталей на станках задается перестановкой **r** натуральных чисел из множества {1,2,...,n}. Если **r**=(1,2,...,n). то x(1)=A(1), x(2)= max {A(1)+A(2) - B(1) - x(1), 0}, ...,

$\sum_{j=1}^{n}$ x(j) = max {A(1)+...+A(n) - B(1)-...-B(n-1),...,A(1)+...+A(j) - B(1)-...-B(j-1), ...,A(1)}.

Пусть **r** и **q** две перестановки

r=(1,2,...,n), **q**=(1,2,...,j-1,j+1,j,...,n).

Пусть F(**r**)<F(**q**). Тогда

max{A(1)+A(2)+...+A(j) - B(1)-B(2)-...-B(j-1), A(1)+A(2)+...+A(j+1) - B(1)-B(2)-...-B(j)}<max{A(1)+A(2)+...+A(j-1)+A(j+1) - B(1)-B(2)-...-(j-1), A(1)+A(2)+...+A(j+1) - B(1)-B(2)-... B(j-1)-B(j+1)}. (1)

Вычтем из левой и правой частей неравенства (1) величину A(1)+A(2)+...A(j+1) - B(1)-B(2)-...-B(j-1).

Получим, после несложных преобразований,

min{A(j+1), B(j)} > min{A(j), B(j+1)}. (2)

Отсюда работа j выполняется раньше работы j+1, если выполняется условие (2).

Вышедоказанное позволяет сформулировать алгоритм Джонсона построения оптимального расписания выполнения работ на двух станках:

Шаг 1. Найти минимальную величину среди A(j) и B(j), j=1,2,...,n.

Шаг 2. Если минимум достигается на A(j), то деталь с номером j ставится на обработку самой первой, если на B(j), то деталь с номером j ставится на обработку последней, деталь с номером j исключается из рассмотрения, и процесс построения расписания продолжается с шага 1.

Построенные расписания наглядно отображаются с помощью так называемых **графиков Ганта** или **Гант-карт**.

График Ганта - это графическое отображения расписания, в котором каждому станку соответствует своя ось времени.

13. Постановка задачи теории расписаний как задачи частично-целочисленного линейного программирования.

Как и в разделе 2.19. пусть $i=1,2,...,m$, - номера станков, $j=1,2,...,n$ - номера деталей, $R=\| r(i,j) \|$ - mn матрица технологических маршрутов, элемент которой $r(i,j)$ - есть номер по порядку обработки детали с номером j на станке с номером i (элемент множества $\{1,2,...,m\}$), $T = \| t(i,j) \|$ - mn матрица трудоемкостей, элемент которой $t(i,j)$ - означает время выполнения работы с номером j на станке с номером i.
В качестве варьируемых параметров математической модели выберем:
$X=\| x(i,j) \|$ - mn матрицу неизвестных, элемент которой $x(i,j)$ означает время начала обработки детали с номером j на станке с номером i, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$;
$y(i,j,k)=1$, если на станке с номером i деталь с номером j обрабатывается раньше детали с номером k ,
$y(i,j,k)=0$, если на станке с номером i деталь с номером k обрабатывается раньше детали с номером j;
t - вспомогательная переменная, определяющая время завершения выполнения всех работ.
Ограничения математической модели.
$x(i,j) - x(i,k) \geq t(i,k)$ или $k(i,k) - x(i,j) \geq t(i,j)$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$. (1)
Одновременно на станке i не могут выполняться работы с номерами j и k.
$x(i,j) - x(k,j) \geq t(k,j)$, если $r(k,j) < r(i,j)$, $i,k=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$. (2)
Деталь с номером j переходит на обработку следующий станок лишь после того, как она пройдет полную обработку на предшествующем по технологии станке.
$x(i,j) + t(i,j) \leq t$. (3)
Общее время завершения выполнения всех работ не превышает величины t.
$x(i,j) \geq 0$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$. (4)
Естественные ограничения на введенные переменные.
В построенной модели не формализованными являются условия (1).
Для формализации условий (1) введем параметр Q -достаточно большое число.
Тогда рассмотрим ограничения (1’):
$(Q + t(i,k))y(i,j,k)+ x(i,j)- x(i,k) \geq t(i,k)$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,n$, $j \neq k$.
$(Q + t(i,j))(1-y(i,j,k))+ x(i,k)- x(i,j) \geq t(i,j)$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,n$, $j \neq k$.
Покажем, что эти условия эквивалентны условиям (1):
- пусть $x(i,j) = x(i,k)$,
тогда если $y(i,j,k) = 1$, то из (1’) получаем :
$Q+t(i,k) + x(i,j) -x(i,k)= Q + t(i,k) \geq t(i,k)$, что всегда верно,
$x(i,k)- x(i,j) = 0 \geq t(i,j)$, т.е. $t(i,j) \leq 0$, т.е. $t(i,j) = 0$, а это означает, что деталь с номером i не проходит обработку на станке j,
если $y(i,j,k) = 0$, то $t(i,k)=0$, т.е. деталь с номером j не обрабатывается на станке i;

- пусть $x(i,j) > x(i,k)$, т.е. деталь с номером j выполняется после детали k, т.е. $y(i,j,k)= 0$, тогда из условий (1’) получим $x(i,j) - x(i,k) \geq t(i,k)$, т.е. условия (1) выполняются;
- пусть $x(i,j) < x(i,k)$, т.е. деталь с номером j выполняется раньше детали k, т.е. $y(i,j,k)= 1$, тогда из условий (1’) получим :

$Q+x(i,j) \geq x(i,k)$, что всегда верно,

$x(i,k) - x(i,j) \geq t(i,j)$, т.е. условия (1) выполняются.

Таким образом математическая модель приобретает вид (1’), (2), (3), (4), и к ней добавляются естественные условия на переменные:

$y(i,j,k) \in \{0,1\}$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,n$. (5)

Постановка оптимизационной задачи.

В качестве критерия оптимальности выбирается функционал

$F(t) = t \to \min$. (6)

Полученная задача (1’), (2) - (6) является задачей частично-целочисленного линейного программирования с числом ограничений $M=mn(n+m-1)+1$ и числом переменных $N=mn(n+1)/2 +1$.