Лекция 17

БЕСКОНЕЧНЫЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

Естественным обобщением матричных игр являются бесконечные антагонистические игры (БАИ), в которых хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий. Мы будем рассматривать *игры двух игроков, делающих по одному ходу, и после этого происходит распределение выигрышей*. При формализации реальной ситуации с бесконечным числом выборов можно каждую стратегию сопоставить определённому числу из единичного интервала, т.к. всегда можно простым преобразованием любой интервал перевести в единичный и наоборот.

Напоминание. Пусть E – некоторое множество вещественных чисел. Если существует число y, такое, что $x \le y$ при всех $x \in E$ (при этом y не обязательно принадлежит E), то множество E называется ограниченным сверху, а число y называется верхней границей множества E. Аналогично определяется ограниченность снизу и нижняя граница множества E. Обозначаются верхняя и нижняя границы соответственно через $\sup E$ и $\inf E$ соответственно.

Пример. Пусть множество E состоит из всех чисел вида $\frac{1}{n}$, $n = 1,2, ...$ Тогда множество E ограничено, его верхняя грань равна 1, а нижняя 0, причём $0 \notin E$, а $1 \in E$.

Для дальнейшего изложения теории игр этого класса введём определения и обозначения : [0; 1] – единичный промежуток, из которого игрок может сделать выбор; x – число (стратегия), выбираемое игроком 1; y – число (стратегия), выбираемое игроком 2; $M_i(x,y)$ – выигрыш i-го игрока; $G\ (X,Y,M_1,M_2)$ – игра двух игроков, с ненулевой суммой, в которой игрок 1 выбирает число x из множества X, игрок 2 выбирает число y из множества Y, и после этого игроки 1 и 2 получают соответственно выигрыши $M_1(x, y)$ и $M_2(x, y)$. Пусть, далее, $G\ (X,Y,M)$ – игра двух игроков с нулевой суммой, в которой игрок 1 выбирает число x, игрок 2 – число y, после чего игрок 1 получает выигрыш $M(x, y)$ за счёт второго игрока.

Большое значение в теории БАИ имеет вид функции выигрышей $M(x, y)$. Так, в отличии от матричных игр, не для всякой функции $M(x, y)$ существует решение. Будем считать, что выбор определённого числа игроком означает применение его чистой стратегии, соответствующей этому числу. По аналогии с матричными играми назовём *чистой нижней ценой* игры величину

$$V_1 = \max_x \inf_y M(x, y) \quad \text{или} \quad V_1 = \max_x \min_y M(x, y),$$

а *чистой верхней ценой* игры величину

$$V_2 = \min_y \sup_x M(x, y) \quad \text{или} \quad V_2 = \min_y \max_x M(x, y),$$

Для матричных игр величины V_1 и V_2 всегда существуют, а в бесконечных играх они могут не существовать.

Естественно считать, что, если для какой-либо бесконечной игры величины V_1 и V_2 существуют и равны между собой ($V_1 = V_2 = V$), то такая игра имеет решение в чистых стратегиях, т.е. оптимальной стратегией игрока 1 есть выбор числа $x_o \in X$ и игрока 2 – числа $y_o \in Y$, при которых $M(x_o, y_o) = V$, в этом случае V называется ценой игры, а (x_o, y_o) – седловой точкой в чистых стратегиях.

Пример 1. Игрок 1 выбирает число x из множества $X = [0; 1]$, игрок 2 выбирает число y из множества $Y = [0; 1]$. После этого игрок 2 платит игроку 1 сумму

$$M(x, y) = 2x^2 - y^2.$$

Поскольку игрок 2 хочет минимизировать выигрыш игрока 1, то он определяет

$$\min_{y \in Y} (2x^2 - y^2) = 2x^2 - 1,$$

т.е. при этом y = 1. Игрок 1 желает максимизировать свой выигрыш, и поэтому определяет

$$\max_{x \in X} (\min_{y \in Y} M(x, y)) = \max_{x \in X} (2x^2 - 1) = 2-1 = 1,$$

который достигается при $x = 1$.

Итак, нижняя цена игры равна $V_1 = 1$. Верхняя цена игры

$$V_2 = \min_{y \in Y} (\max_{x \in X} (2x^2 - y^2)) = \min_{y \in Y} (2 - y^2) = 2-1 = 1,$$

т.е. в этой игре $V_1 = V_2 = 1$. Поэтому цена игры $V = 1$, а седловая точка (1;1).

Пример 2. Игрок 1 выбирает $x \in X = (0; 1)$, игрок 2 выбирает $y \in Y = (0; 1)$. После этого игрок 1 получает сумму

$$M(x, y) = x + y$$

за счёт игрока 2. Поскольку X и Y – открытые интервалы, то на них V_1 и V_2 не существуют. Если бы X и Y были замкнутые интервалы, то, очевидно, было бы следующее :

$$V_1 = V_2 = 1 \quad \text{при} \quad x_o = 1, y_o = 0.$$

С другой стороны, ясно, что, выбирая x достаточно близкое к 1, игрок 1 будет уверен, что он получит выигрыш не меньше, чем число, близкое к цене игры $V = 1$; выбирая y близкое к нулю, игрок 2 не допустит, чтобы выигрыш игрока 1 значительно отличался от цены игры $V = 1$.

Степень близости к цене игры может характеризоваться числом $\varepsilon > 0$. Поэтому в описываемой игре можно говорить об оптимальности чистых стратегий $x_o = 1$, $y_o = 0$ соответственно игроков 1 и 2 с точностью до произвольного числа ε > 0. В связи с этим введём следующие определения.

Точка $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$, где $x_\varepsilon \in X$, $y_\varepsilon \in Y$, в антагонистической непрерывной игре G называется *точкой ε-равновесия* , если для любых стратегий $x \in X$ игрока 1, $y \in Y$ игрока 2 имеет место неравенство

$$M(x, y_\varepsilon) - \varepsilon \le M(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \le M(x_\varepsilon, y) + \varepsilon.$$

Точка ε-равновесия $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ называется также *ε-седловой точкой функции* $M(x, y)$, а стратегии x_ε и y_ε называются *ε-оптимальными стратегиями*. Эти стратегии являются оптимальными с точностью до ε в том смысле, что, если отклонение от оптимальной стратегии никакой пользы игроку принести не может, то его отклонение от ε-оптимальной стратегии может увеличить его выигрыш не более, чем на ε.

Можно доказать, что для того, чтобы функция M имела ε-седловые точки для любого ε > 0 необходимо и достаточно чтобы

$$\sup_x \inf_y M(x, y) = \inf_y \sup_x M(x, y).$$

Если игра G не имеет седловой точки (ε-седловой точки) в чистых стратегиях, то оптимальные стратегии можно искать среди смешанных стратегий. Однако, в качестве вероятностной меры здесь вводятся функции распределения вероятностей применения игроками чистых стратегий.

Пусть $F(x)$ – функция распределения вероятностей применения чистых стратегий игроком 1. Если число ξ – чистая стратегия игрока 1, то

$$F(x) = P(\xi \le x),$$

где $P(\xi \le x)$ означает вероятность того, что случайно выбранная чистая стратегия ξ не будет превосходить числа x. Аналогично рассматривается функция распределения вероятностей применения чистых стратегий η игроком 2

$$Q(y) = P(\eta \le y).$$

Функции $F(x)$ и $Q(y)$ называются *смешанными стратегиями* соответственно игроков 1 и 2. Если $F(x)$ и $Q(y)$ дифференцируемы, то существуют их производные, обозначаемые соответственно через $f(x)$ и $q(y)$ (функции плотности распределения).

В общем случае дифференциал функции распределения $dF(x)$ выражает вероятность того, что стратегия ξ находится в промежутке

$$x \le \xi \le x + dx.$$

Аналогично для игрока 2: $dQ(y)$ означает вероятность того, что его стратегия η находится в интервале

$$y \le \eta \le y + dy.$$

Тогда выигрыш игрока 1 составит

$$M(x, y)\, dF(x),$$

а выигрыш игрока 2 равен

$$M(x, y)\, dQ(y).$$

Средний выигрыш игрока 1 при условии, что игрок 2 применяет свою чистую стратегию *y*, получим, если проинтегрируем выигрыш по всем возможным значениям *x,* т.е.

$$E(F, y) = \int_0^1 M(x,y)\, dF(x)$$

Напомним, что множество Y для y является замкнутым промежутком [0; 1].

Если игрок 1 применяет свою чистую стратегию *x*, а игрок 2 – *y*, то выигрыш игрока 1 составит

$$M(x, y)\, dP(\mathrm{x})\, dQ(y).$$

Средний выигрыш игрока 1 при условии, что оба игрока применяют свои смешанные стратегии $F(x)$ и $Q(y)$, будет равен

$$E(\mathrm{F,Q}) = \int_0^1\int_0^1 M(x,y)\, dF(x)\, dQ(y)\,.$$

По аналогии с матричными играми определяются оптимальные смешанные стратегии игроков и цена игры: в антагонистической непрерывной игре $G(X,Y,M)$ пара смешанных стратегий $F^*(x)$ и $Q^*(y)$ соответственно для игроков 1 и 2 образует седловую точку в смешанных стратегиях, если для любых смешанных стратегий $F(x)$ и $Q(y)$ справедливы соотношения

$$E(F,Q^*) \le E(F^*,Q^*) \le E\,(F^*,Q).$$

Из левой части последнего неравенства следует, что если игрок 1 отступает от своей стратегии $F^*(x)$, то его средний выигрыш не может увеличиться, но может уменьшиться за счёт лучших действий игрока 2, поэтому $F^*(x)$ называется *оптимальной смешанной стратегией игрока 1*.

Из правой части последнего неравенства следует, что если игрок 2 отступит от своей смешанной стратегии $Q^*(y)$, то средний выигрыш игрока 1 может увеличиться, а не уменьшиться, за счёт более разумных действий игрока 1, поэтому $Q^*(y)$ называется *оптимальной смешанной стратегией игрока 2*. Средний выигрыш $E(F^*,Q^*)$, получаемый игроком 1 при применении игроками оптимальных смешанных стратегий, называется *ценой игры*.

По аналогии с матричными играми рассматривается нижняя цена непрерывной игры в смешанных стратегиях

$$V_1 = \max_F \min_Q E(F,Q)$$

и верхняя цена игры

$$V_2 = \min_F \max_Q E(F,Q).$$

Если существуют такие смешанные стратегии $F^*(x)$ и $Q^*(y)$ соответственно для игроков 1 и 2, при которых нижняя и верхняя цены непрерывной игры совпадают, то $F^*(x)$ и $Q^*(y)$ естественно назвать оптимальными смешанными стратегиями соответствующих игроков, а $V_1 = V_2 = V$ – ценой игры.

Можно доказать, что существование седловой точки в смешанных стратегиях игры $G(X,Y,M)$ равносильно существованию верхней V_2 и нижней V_1 цен игры в смешанных стратегиях и их равенству $V_1 = V_2 = V$.

Таким образом, решить игру $G(X,Y,M)$ – означает найти седловую точку или такие смешанные стратегии, при которых нижняя и верхняя цены игры совпадают.

Теорема 1 (существования). Всякая антагонистическая бесконечная игра двух игроков G с непрерывной функцией выигрышей $M(x,y)$ на единичном квадрате имеет решение (игроки имеют оптимальные смешанные стратегии).

Теорема 2. Пусть – бесконечная антагонистическая игра с непрерывной функцией выигрышей $M(x, y)$ на единичном квадрате и ценой игры V. Тогда, если $Q(y)$ – оптимальная стратегия игрока 2 и для некоторого x_o

$$\int_0^1 M(x_o, y)\, dQ(y) < V,$$

то x_o не может входить в точки спектра оптимальной стратегии игрока 1; если $F(x)$ – оптимальная стратегия игрока 1и для некоторого y_o

$$\int_0^1 M(x, y_o)\, dF(x) > V,$$

то y_o не может быть точкой спектра оптимальной стратегии игрока 2.

Из теоремы 2 следует, что если один из игроков применяет оптимальную стратегию, а другой – чистую, притом что средний выигрыш игрока 1 отличается от цены игры, то эта чистая стратегия не может войти в его оптимальную стратегию (или она входит в неё с вероятностью нуль).

Теорема 3. Пусть в бесконечной антагонистической игре функция выигрышей $M(x,y)$ непрерывная для $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$ и

$$M(x, y) = -M(y, x),$$

тогда цена игры равна нулю и любая оптимальная стратегия одного игрока будет также оптимальной стратегией другого игрока.

Сформулированные свойства оптимальных смешанных стратегий и цены игры помогают находить или проверять решения, но они ещё не дают в общем виде приемлемых методов решения игры. Более того, не существует общих методов для точного нахождения решения БАИ, и в том числе непрерывных игр на единичном квадрате. Поэтому рассматриваются частные виды антагонистических бесконечных игр.

§2. ИГРЫ С ВЫПУКЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВЫИГРЫШЕЙ.

Игры с выпуклыми непрерывными функциями выигрышей, называемые часто *ядром*, называются *выпуклыми*.

Напомним, что *выпуклой* функцией f действительной переменной x на интервале (a,b) называется такая функция, для которой выполняется неравенство

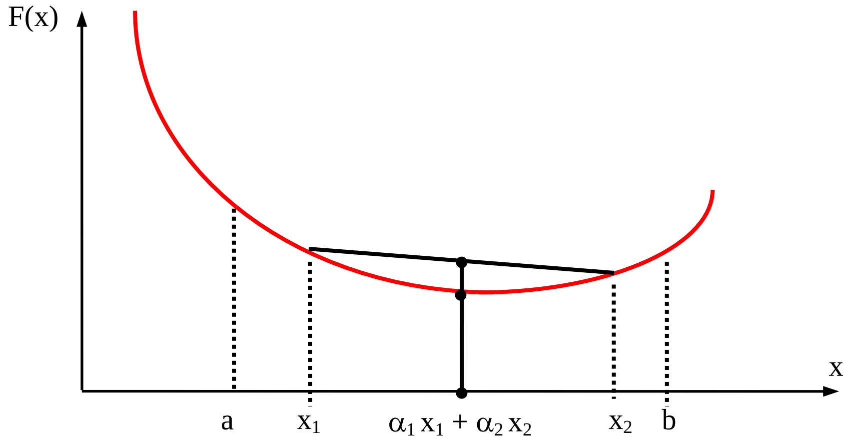
$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

где x_1 и x_2 – любые две точки из интервала (a,b); $\alpha_1, \alpha_2 \ge 0$, причём $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Если для $\alpha_1 \ne 0$, $\alpha_2 \ne 0$ всегда имеет место строгое неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

то функция f называется *строго выпуклой* на $(a;b)$. Геометрически выпуклая функция изображает дугу, график которой расположен ниже стягивающей её хорды (см. рис.)



Напомним, также, что непрерывная и строго выпуклая функция f на замкнутом интервале принимает минимальное значение только в одной точке интервала.

Для нахождения решения выпуклой игры можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 4. Пусть $M(x, y)$ – непрерывная функция выигрышей игрока 1, на единичном квадрате и *строго* выпуклая по y для любого x. Тогда имеется единственная оптимальная чистая стратегия $y = y_o \in [0;1]$ для игрока 2, цена игры определяется по формуле

$$V = \min_y \max_x M(x, y), \qquad (1)$$

значение y_o определяется как решение следующего уравнения

$$\max_x M(x, y_o) = V. \qquad (2)$$

Замечание. Если в теореме 4 **не** предполагать строгую выпуклость функции $M(x, y)$ по y, а просто выпуклость, то теорема остаётся в силе с тем отличием, что у игрока 2 оптимальная чистая стратегия не будет единственной.

Замечание. Выпуклые игры называют часто выпукло-вогнутыми, т.к. игра в них имеет седлообразное ядро, а так как ядро седлообразное, то игра имеет седловую точку в чистых стратегиях.

Таким образом, если $M(x, y)$ непрерывна и <u>*выпукла по y*</u>, то цена игры определяется по формуле (1), и игрок 2 имеет оптимальную чистую стратегию, определяемую из уравнения (2).

Аналогично и для игрока 1: если функция выигрышей $M(x, y)$ непрерывна по обоим аргументам и <u>*строго вогнута по x*</u> при любом y, то в этом случае игрок 1 имеет единственную оптимальную стратегию.

Цена игры определяется по формуле

$$V = \max_x \min_y M(x,y), \qquad (3)$$

а чистая оптимальная стратегия x_o игрока 1 определяется из уравнения

$$\min_y M(x_o, y) = V. \qquad (4)$$

<u>Пример</u>. Пусть на квадрате [0;1] задана функция

$$M(x, y) = \sin\frac{\pi(x+y)}{2}. \qquad (5)$$

Так как

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\frac{\pi(x+y)}{2} < 0 \text{ для } x \in [0;\ 1],\ y \in (0;1),$$

то $M(x, y)$ строго вогнута по x для любого $y \in (0;1)$. Следовательно, цена игры находится по формуле (3)

$$V = \max_x \min_y \sin\frac{\pi(x+y)}{2}.$$

Отметим, что при $0 \le x \le \frac{1}{2}$ справедливо равенство

$$\min_{0\le y\le 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \sin\frac{\pi x}{2}$$

а при $0{,}5 < x \le 1$

$$\min_{0\le y\le 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \sin\frac{\pi(x+1)}{2}$$

Поэтому

$$V = \max\,[\max_{0\le x\le\frac{1}{2}} \min_{0\le y\le 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2};\ \max_{\frac{1}{2}\le x\le 1} \min_{0\le y\le 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2}] =$$

$$= \max\,[\max_{0\le x\le\frac{1}{2}} \sin\frac{\pi x}{2};\ \max_{\frac{1}{2}\le x\le 1} \sin\frac{\pi(x+1)}{2}] =$$

$$= \max\,[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}] = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

При этом значение x получается равным $x_o = \frac{1}{2}$. Это же значение получается из решения уравнения

$$\min_{0\le y\le 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

т.к. минимум достигается при $y = 0$, и это уравнение превращается в следующее

$$\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда следует, что $x = \frac{1}{2}$.

Заметим, что если в функции выигрышей (5) поменять местами x и y, то она не изменится, а следовательно, эта функция выпукла и по y при всех $x \in [0;1]$. Поэтому к ней применима та же теория, т.е. у игрока 2 существует оптимальная чистая стратегия y_o, определяемая из уравнения (4)

$$\max_{0\le x\le 1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Очевидно, максимум по x достигается при $x = \frac{1}{2}$, и последнее уравнение примет вид

$$\sin\frac{\pi\left(\frac{1}{2}+y\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решением последнего уравнения будет $y_o = 0$. Следовательно, игрок 2 имеет оптимальную чистую стратегию $y_o = 0$.

Замечание. В приведённом выше примере мы могли определить оптимальную стратегию игрока 1, а игрока 2 - только случайно, в силу “удачного” вида $M(x, y)$.

Рассмотрим теперь метод определения оптимальных стратегий того игрока, для которого функция выигрышей не обязательно выпукла. Пусть непрерывная функция $M(x, y)$, заданная на единичном квадрате, выпукла по y. Нас будет интересовать вопрос нахождения оптимальных стратегий 1 игрока. Предположим также, что для $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$ существует частная производная функции $M(x, y)$ по y, причём в точках $y = 0$ и $y = 1$ $M_y'(x, y) = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ понимается как правая и левая производная соответственно. Обозначим через y_o одну из оптимальных чистых стратегий игрока 2 (эта стратегия существует в соответствии с теоремой 4).

Согласно теореме 2 чистые стратегии x игрока 1 могут входить в его оптимальную стратегию с положительной вероятностью, если для них выполняется равенство

$$M(x, y_o) = V.$$

Такие чистые стратегии x называются *существенными*.

Теорема 5. Пусть дана бесконечная антагонистическая игра с непрерывной и дифференцируемой по y на единичном квадрате при любом x функцией выигрышей $M(x, y)$, с оптимальной чистой стратегией y_o игрока 2 и ценой игры V, тогда :

1) если $y_o = 1$, то среди оптимальных стратегий игрока 1 имеется существенная чистая стратегия x_1, для которой

$$M_y'(x_1, 1) \le 1;$$

2) если $y_o = 0$, то среди оптимальных стратегий игрока 1 имеется существенная чистая стратегия x_2, для которой

$$M'_y(x_2, 0) \ge 0;$$

3) если $0 \le y_o \le 1$, то среди оптимальных стратегий игрока 1 найдётся такая, которая является смесью двух существенных стратегий x_1 и x_2. Для этих стратегий

$$M'_y(x_1, y_o) \le 0, \; M'_y(x_2, y_o) \ge 0,$$

стратегия x_1 употребляется с вероятностью α, стратегия x_2 – с вероятностью $(1 - \alpha)$, где α находится из уравнения

$$\alpha\, M'_y(x_1, y_o) + (1 - \alpha)\, M'_y(x_2, y_o) = 0. \qquad (*)$$

Пример. Пусть функция выигрышей в бесконечной антагонистической игре задана на единичном квадрате и равна

$$M(x, y) = (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Эта функция непрерывна по x и y, и поэтому эта игра имеет решение. Кроме того

$$\frac{\partial^2 M(x,y)}{\partial y^2} = 2 > 0.$$

Следовательно, $M(x, y)$ выпукла по y, и поэтому согласно теореме 4 цена игры определяется по формуле (1), игрок 2 имеет чистую оптимальную стратегию y_o, определяемую из уравнения (2). Таким образом, имеем

$$V = \min_y \max_x (x - y)^2;$$

Для определения $\max_x (x^2 - 2xy + y^2)$ последовательно найдём

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 2x - 2y := 0 \;\Rightarrow\; x = y$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 2 > 0 \qquad \Rightarrow$$ при $x = y$ функция M имеет минимум для любого y.

$\Rightarrow$ максимум достигается в одной из крайних точек $x = 0$ и (или) $x = 1$

$M(0; y) = y^2$

$M(1; y) = 1 - 2y + y^2 = (y - 1)^2$

$\Rightarrow V = \min\limits_{0 \le y \le 1} \max \{y^2; (1 - y)^2\}$

Данный $\min\limits_{0 \le y \le 1} \max \{...\}$ достигается в том случае, если $y^2 = (1 - y)^2$, т.е. $y = \frac{1}{2}$.

Следовательно $V = \frac{1}{4}$ при $y_o = \frac{1}{2}$.

Определим теперь оптимальные стратегии для игрока 1. Поскольку $y_o = \frac{1}{2}$, то $0 < y_o < 1$. Согласно теореме 5 рассмотрим третий случай.

Определим x из уравнения

$$M(x, y_o) = V,$$

то есть

$$(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

Решая последнее уравнение, получим $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Теперь необходимо определить величину α – вероятность применения чистой стратегии $x_1 = 0$. С этой целью используем уравнение (*).

$$\alpha\, M_y'(0, \frac{1}{2}) + (1 - \alpha)\, M_y'(1, \frac{1}{2}) = 0.$$

Нетрудно найти

$$M_y'(0; \frac{1}{2}) = -2(x - y)\Big|_{\substack{x=0 \\ y=1/2}} = +1,$$

$$M_y'(1; \frac{1}{2}) = -2(x - y)\Big|_{\substack{x=1 \\ y=1/2}} = -1.$$

Тогда уравнение для α примет вид :

$$\alpha - (1 - \alpha) = 0,$$

откуда $\alpha = \frac{1}{2}$. Следовательно, стратегия игрока 1

$$F(x) = \frac{1}{2} J_o(x) + \frac{1}{2} J_1(x),$$

а игрока 2

$$Q(y) = J_{1/2}(y).$$

Здесь через $J_a(x)$ обозначена ступенчатая функция

$$J_a(x) = \begin{cases} 0, & при\ \ x \le a \\ 1, & при\ \ x \ge a \end{cases}.$$