Лекция 26
МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

План:
1. Экстраполирование
2. Методы вероятностного прогнозирования
3. Методы долгосрочного прогнозирования

Методы прогнозирования основываются на предположении о сохранении в будущем существующих закономерностей развития или на предстоящих качественных изменениях системы.

В первом случае для краткосрочных и среднесрочных прогнозов (планирования) используются методы экстраполяции.

Во втором случае, как правило, для долгосрочных прогнозов – методы искусственного интеллекта или теории катастроф

Методы экстраполяции относятся к аналитическим методам прогнозирования состояния систем. Примером экстраполяции служит прогнозирование значений какой-либо величины по имеющимся данным. В качестве исходной информации при этом берутся **временные ряды** динамики параметров системы - набор наблюдений некоторых числовых характеристик (параметров) системы, взятых в равноотстоящие или неравноотстоящие моменты времени за определенный период.

Средства искусственного интеллекта опираются на методы качественного оценивания систем. Примером применения подобных методов являются экспертные системы.

1. Экстраполирование

В основе методов экстраполяции лежит понятие интерполирования. Известно, что **интерполированием** называется процесс вычисления промежуточных значений функции на основании заданного ряда значений этой функции. В широком смысле слова интерполирование - это представление некоторой функции известного или неизвестного вида, ряд значений которой при определенных значениях независимой переменной задан при помощи другой, более простой функции.

Пусть $y = f(x)$ будет функцией, заданной рядом значений $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$, которые она принимает при значениях $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ независимой переменной x, и пусть $\varphi(x)$ обозначает произвольную более простую функцию, принимающую для $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ те же самые значения, что и $y = f(x)$. Замена $y = f(x)$ в пределах данного интервала на $\varphi(x)$ и есть интерполирование.

Формула $y = \varphi(x)$, которая при этом получается для вычисления значений y, называется интерполяционной формулой.

Функция $\varphi(x)$ может иметь различный вид. Когда $\varphi(x)$ есть полином, процесс замещения $f(x)$ через $\varphi(x)$ называется параболическим, или

полиномиальным интерполированием. Когда $\varphi(x)$ есть тригонометрический полином, процесс называется **тригонометрическим интерполированием.** Функция $\varphi(x)$ может быть также составлена из показательных функций, полиномов Лежандра, функцией Бесселя и т.д.

В практических задачах в качестве $\varphi(x)$ выбирается простейшая функция, могущая заменить данную функцию на рассматриваемом интервале. Так как самой простой функцией является полином, почти все основные интерполяционные функции являются полиномиальными. В случае когда известно, что данная функция $f(x)$ периодична, лучше заменить ее тригонометрическим полиномом.

Теоретическое обоснование замены данной функции полиномом или тригонометрическим полиномом опирается на две замечательные теоремы, доказанные **Вейерштрассом** в 1885 г. Эти теоремы можно сформулировать так.

Теорема 1. Любая непрерывная в интервале (a,b) функция может быть заменена в нем с любой степенью точности полиномом.

Другими словами, можно найти такой полином $P(x)$, что $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ для каждого значения x в интервале (a,b), причем ε есть любая положительная величина.

Теорема 2. Любая непрерывная с периодом 2π функция может быть заменена тригонометрическим полиномом вида

$$g(x) = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots a_n \sin nx + \\ + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots a_n \cos nx$$

так, что $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ для каждого значения x в рассматриваемом интервале, причем ε есть любая положительная величина.

Геометрический смысл этих теорем состоит в том, что если нанести графики функций $y = f(x)$, $y = f(x) + \varepsilon$ и $y = f(x) - \varepsilon$, то можно найти многочлен или тригонометрический многочлен, график которого будет находиться внутри области, ограниченной кривыми $y = f(x) + \varepsilon$ и $y = f(x) - \varepsilon$ при всех значениях x между a и b, как бы мало ни было ε (рис. 13.1).

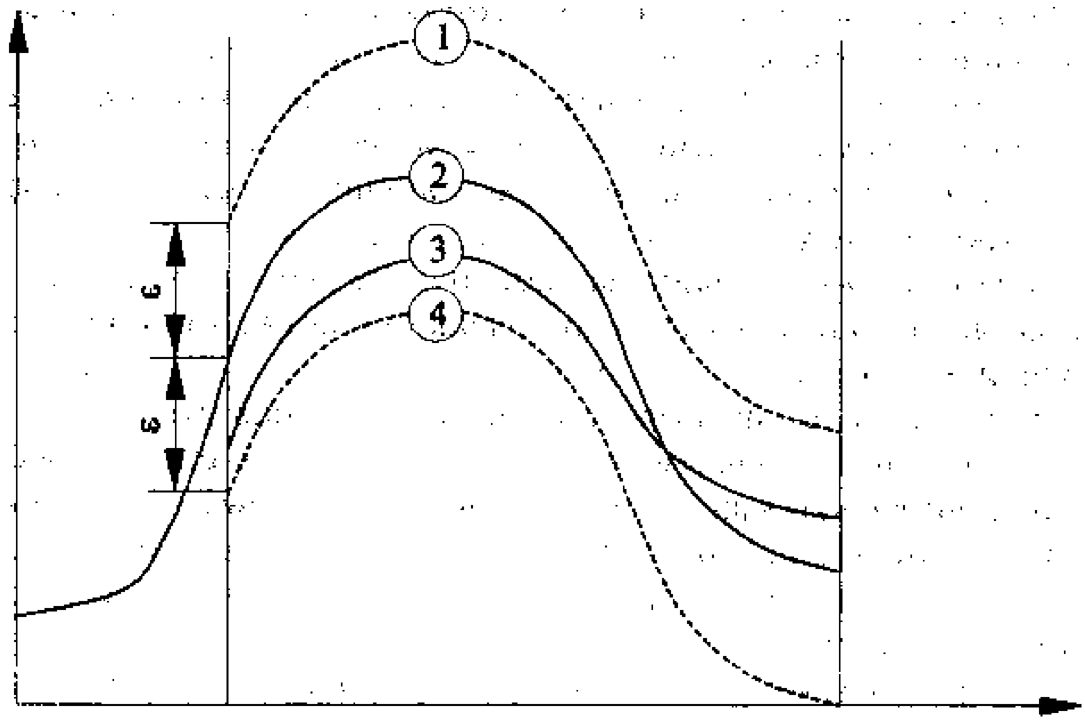

Рисунок 13.1 – Интерполирование функции полиномом:
1 – верхнее ограничение $y = f(x) + \varepsilon$; 2 - функция $y = f(x)$;
3 - полином y = $P(x)$; 4 - нижнее ограничение $y = f(x) - \varepsilon$

При таком представлении процесса интерполирования становится понятно, что **экстраполирование** - это процесс вычисления значения функций, находящегося за пределами ряда заданных значений.

Экстраполирование нужно применять с осторожностью. Но если известно, что функция около концов данного ряда значений изменяется плавно, и если Δx берется достаточно малым, то можно спокойно экстраполировать на расстояние Δx за пределами ряда имеющихся значений.

Для проведения интерполирования существует ряд формул, рассматриваемых в численных методах математического анализа. При их применении в прогнозировании следует учитывать, что если число точек $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ неограниченно возрастает, то интерполирующий полином превращается в бесконечный ряд, называемый интерполяционным рядом. И подобно тому как степенной ряд сходится внутри и расходится во вне некоторого определенного интервала, так и интерполяционный ряд сходится к заданной функции внутри некоторого интервала и перестает к ней сходиться вне его.

Поскольку увеличение периода упреждения прогноза Δx влечет за собой увеличение степени неопределенности процессов развития системы, то в методах экстраполяции выделяют статистические методы.

2. Методы вероятностного прогнозирования

Методы вероятностного прогнозирования опираются на теорию вероятностей, математическую статистику и теорию случайных процессов.

К этим методам прогнозирования относят:

– **методы многофакторного анализа** (регрессионные модели, адаптивное сглаживание, метод группового учета аргументов, имитационные модели, многомерная фильтрация и др.);

– **методы однофакторного прогнозирования** (экспоненциальное сглаживание, метод скользящего среднего, метод разностных уравнений, спектральные методы, метод Марковских цепей, оптимальные фильтры, сплайн функции, метод авторегрессии и др.).

Теория случайных процессов имеет дело с исследованием структуры семейств случайных величин X_t, где t - параметр, принадлежащий множеству T. Случайные процессы, у которых $T = [0, \infty)$, особенно важны для прогнозирования. При этом t интерпретируется как время. Реализацией, или выборочной функцией, случайного процесса $\{X_t,\ t \in T\}$ является функция, ставящая в соответствие каждому $t \in T$ одно из возможных значений X_t. Множество параметров T может быть дискретным, а $\{X_t\}$ может при этом представлять исходы последовательных испытаний, таких, как результаты бросаний монеты, последовательность состояний системы при различных воздействиях и др.

Весьма важным примером случайного процесса, непрерывного по времени $T = [0, \infty)$, является **пуассоновский процесс.** Его выборочная функция X_t представляет собой число регистрации наступления некоторого события за период от 0 до текущего момента времени t. Очевидно, всякая возможная реализация $\boldsymbol{X_t}$ есть неубывающая ступенчатая функция. Общее число наступлений события возрастает только единичными скачками, а $X_0 = 0$. Конкретными примерами наблюдаемых величин, образующих подобного рода процессы, являются число телефонных вызовов из данного района, число происшествий на данном перекрестке, число ошибок на странице машинописного текстам т.д. Свойствами пуассоновских процессов являются:

- независимость числа наступлений события в некотором интервале от числа поступлений этого события в любом другом, не пересекающемся с ним интервале;
- вероятность того, что за период времени h произойдет, по меньшей мере, одно событие, есть $p(h) = ah + 0(h), \quad h \to 0, \quad a > 0$,причем $g(t) = 0(t)$ при $t \to 0$ означает, что $\lim g(t)/t = 0$;
- вероятность того, что за время h произойдут два или более событий, есть o(h), что означает невозможность одновременного появления двух и более событий.

Если перечисленные условия выполняются, то в качестве прогноза может быть получена вероятность $P_m(t)$ того, что за время t произойдет ровно m событий. Эта вероятность равна

$$P_m(t) = \frac{a^m t^m}{m!} e^{-at},$$

где a - параметр процесса, причем $p(h)/h \to a$.

В частности, среднее число наступления события за время ***t*** равно ***at.***

Модель пуассоновских процессов совместно с порядковыми статистиками используется для решения задачи о баллотировке (выборах). Многомерные пуассоновские процессы используются в астрономии.

Одной из основных моделей случайных процессов, используемой в прогнозировании, является модель **Марковских цепей.** Такими моделями описывается большое количество физических, биологических, экономических, технических и других явлений.

Дискретная Марковская цепь представляет собой Марковский случайный процесс, пространство состояний которого счетно или конечно. Кроме того, множество индексов T = (1, 2, 3 ...).

Марковский процесс - это процесс, обладающий тем свойством, что если известно значение случайной величины X_t, то значения X_s, s > t не зависят от X_u, u < t, другими словами, вероятность любого события, связанного с будущим поведением процесса при условии, что его настоящее состояние точно известно, не изменится, если учесть дополнительную информацию относительно прошлого этого процесса.

Формально процесс является Марковским, если

$$P\{a < X_t \leq b | X_{t1} = x_1, X_{t2} = x_2, ..., X_{tn} = x_n,\} = P\{a < X_t \leq b | \ X_{tn} = x_n\}$$

Классическими примерами цепей Маркова являются процессы рождения и гибели (прогнозирование численности популяции организмов), ветвящиеся процессы (моделирование электронных умножителей, развитие нейтронной цепной реакции, развитие биологических систем), броуновское движение (физические и социальные процессы), вероятностные модели мутаций и роста, модели иммиграции и роста популяции, описание генетического механизма, модели экологических процессов, системы массового обслуживания.

При использовании моделей случайных процессов предполагает знание законов распределения случайных величин. К сожалению, во многих реальных системах, в частности в информационных системах, знание этих законов не полно. В таких условиях применяются методы прогнозирования, основанные **на неравенстве Чебышева,** представляемом как

$$p(X \geq a) \leq M_x / a, a > 0$$

или как

$$p(|X - M_x| \geq a) \leq D_x / a^2, a > 0$$

где M_x - математическое ожидание;

D_x - дисперсия случайной величины.

Особенность приведенных выражений заключается в том, что они способны аппроксимировать любой закон распределения и, следовательно, заменить его собой. Достаточно знать только M_x и D_x, чтобы построить нужную аппроксимацию. При этом сохраняются простота модели, умеренные требования к исходным данным, однозначность рекомендаций.

Однако следует понимать, что применение неравенства Чебышева дает возможность получить лишь ориентировочные оценки прогнозируемой величины и затрудняет оценку погрешности прогноза.

13.3 Методы долгосрочного прогнозирования

В случае, когда требуется получить долгосрочный прогноз развития какого-либо процесса, часто используется **аппроксимация логистической зависимостью**, называемой также сигмоидальной (S-образной) функцией

$$y = a/\left(1 + be^{-cx}\right),$$

где *a, b, c* - некоторые положительные величины, выбираемые в соответствии с имеющейся информацией об изучаемых явлениях.

Особенностью логистической кривой (рис. 13.2) является то, что существует предел ***a***, к которому стремятся значения исследуемой переменной ***y***, например, население Земли, рост производительности труда, уровень возбуждения искусственного персептрона в нейронных сетях, при $x \to \infty$.

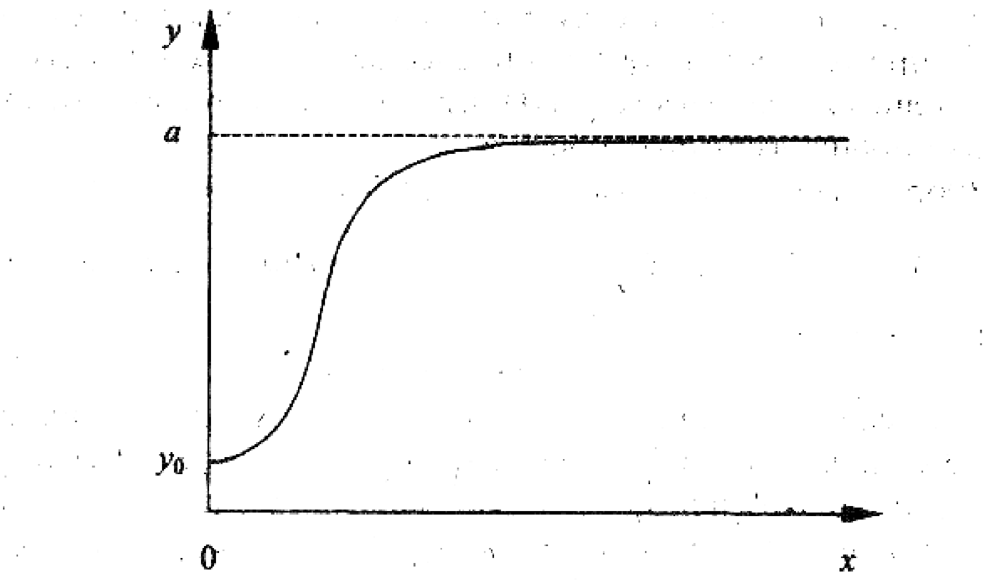

Рисунок 13.2 – Логистическая кривая: $y_0 = a/(1+b)$

Использование логистической кривой облегчает поиск приемлемых оценок будущего. Однако следует помнить, что в жизненном цикле систем существуют периоды сравнительно медленных эволюционных изменений и периоды скачкообразных изменений состояния.

Каких-либо универсальных формальных правил надежного прогнозирования скачкообразных изменений состояния систем в настоящее время не существует. Однако в ряде случаев для прогнозирования таких изменений используются модель **теории катастроф**.

В литературе описывается использование теории катастроф в оптике, лингвистике, экономике, гидродинамике, психологии, геологии и других предметных областях. Однако имеется также много публикаций, специально посвященных критике этой теории.

При использовании любых методов прогнозирования возникают проблемы, связанные с **оценкой качества прогноза.** Эти проблемы решаются в процессе **верификации прогноза** - по совокупности критериев, способов и процедур, позволяющих на основе многостороннего анализа оценить достоверность, точность и обоснованность прогноза. В управлении качество прогноза может оцениваться по результату его использования для целей планирования.

Общие методы верификации прогнозов пока не выработаны. Однако считается, что доверительный прогнозный интервал не может быть меньше определенной величины, зависящей от инерционности, связности, сложности системы, устойчивости динамики и т.д. Так, чем более инерционной является система, тем более гладкой и устойчивой представляется траектория ее изменения, и, следовательно, вероятность попадания прогнозируемой величины в доверительный интервал больше.