

Лекция 29

Система массового обслуживания

1. Основные понятия,
2. Классификация СМО и их основные элементы,
3. Характеристика систем массового обслуживания.

1. Основные понятия

Системой массового обслуживания (СМО) называется любая система (в том числе и в туристической сфере), предназначенная для обслуживания какого-либо потока заявок.

Примерами систем массового обслуживания могут служить:

- посты технического обслуживания автомобилей;
- посты ремонта автомобилей;
- персональные компьютеры, обслуживающие поступающие заявки или требования на решение тех или иных задач;
- станции технического обслуживания автомобилей;
- аудиторские фирмы;
- отделы налоговых инспекций, занимающиеся приемкой и проверкой текущей отчетности предприятий;
- телефонные станции и т. д.

В СМО обслуживаемый объект называют **требованием**. В общем случае под **требованием** обычно понимают запрос на удовлетворение некоторой потребности, например, разговор с абонентом, посадка самолета, покупка билета, получение материалов на складе. Средства, обслуживающие требования, называются **обслуживающими устройствами** или **каналами обслуживания**. Например, к ним относятся каналы телефонной связи, посадочные полосы, мастера-ремонтники, билетные кассиры, погрузочно-разгрузочные точки на базах и складах, отели, перевозчики.

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимости между факторами, определяющими функциональные возможности системы массового обслуживания, и эффективностью ее функционирования.

Основной задачей теории СМО является изучение режима функционирования обслуживающей системы и исследование явлений, возникающих в процессе обслуживания.

Так, одной из характеристик обслуживающей системы является **время пребывания требования в очереди**.

Очевидно, что это время можно сократить за счет увеличения количества обслуживающих устройств. Однако каждое дополнительное устройство требует определенных материальных затрат, при этом увеличивается время бездействия обслуживающего устройства из-за отсутствия требований на обслуживание, что также является негативным явлением. Следовательно, в теории СМО *возникают задачи оптимизации*: каким образом достичь определенного уровня обслуживания (максимального сокращения очереди

или потерь требований) при минимальных затратах, связанных с простым обслуживающих устройств.

Система обслуживания вважається заданою, якщо відомі:

- потік замовлень, його характер;
- множина обслуговуючих каналів;
- дисципліна обслуговування (сукупність правил, що задають процес обслуговування).

Процес роботи системи масового обслуговування є випадковим процесом із дискретними станами та безперервним часом. Стан системи масового обслуговування змінюється стрибком у моменти появи якихось подій:

- або прихід нового замовлення;
- або закінчення обслуговування;
- або момент, коли замовлення, що перевищило свій максимальний термін очікування, залишає чергу.

2. *Классификация СМО и их основные элементы*

В большинстве случаев все параметры, описывающие системы массового обслуживания, являются случайными величинами или функциями, поэтому эти системы относятся к *стохастическим системам*. Случайный характер потока заявок (требований), а также, в общем случае, и длительности обслуживания приводит к тому, что в СМО происходит случайный процесс. По характеру случайного процесса, происходящего в СМО, различают системы **марковские** и **немарковские**. Случайный процесс называется **марковским**, если для любого момента времени t вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние. Переходы системы из состояния в состояние происходят под действием каких-то потоков событий (поток заявок, поток отказов). В случае **немарковских** процессов задачи исследования СМО значительно усложняются и требуют применения статистического моделирования, численных методов с использованием ЭВМ. СМО классифицируются на разные группы в зависимости от состава и от времени пребывания в очереди до начала обслуживания, и от дисциплины обслуживания требований. По составу СМО бывают **одноканальные** (с одним обслуживающим устройством) и **многоканальными** (с большим числом обслуживающих устройств). Многоканальные системы могут состоять из обслуживающих устройств как одинаковой, так и разной производительности. По времени пребывания требований в очереди до начала обслуживания системы делятся на три группы:

- **с ожиданием,**
- **с отказами,**
- **смешанного типа.**

В СМО **с ожиданием** очередное требование, застав все устройства занятыми, становится в очередь и ожидает обслуживания до тех пор, пока одно из устройств не освободится. СМО с ожиданием распространены наиболее

широко. Их можно разбить на 2 большие группы - **разомкнутые и замкнутые**.

К **замкнутым** относятся системы, в которых поступающий поток требований ограничен. Например, мастер, задачей которого является наладка станков в цехе, должен периодически их обслуживать. Каждый налаженный станок становится в будущем потенциальным источником требований на подналадку. В подобных системах общее число циркулирующих требований конечно и чаще всего постоянно. Если питающий источник обладает бесконечным числом требований, то системы называются **разомкнутыми**. Примерами подобных систем могут служить магазины, кассы вокзалов, портов и др. Для этих систем поступающий поток требований можно считать неограниченным.

В **системах с отказами** поступившее требование, застав все устройства занятыми, покидает систему. Классическим примером системы с отказами может служить работа автоматической телефонной станции.

В **системах смешанного типа** поступившее требование, застав все устройства занятыми, становятся в очередь и ожидают обслуживания в течение ограниченного времени. Не дождавись обслуживания в установленное время, требование покидает систему.

Основными элементами СМО являются:

- **входящий поток требований**
- **очередь требований**
- **обслуживающие устройства(каналы)**
- **выходящий поток требований.**

Изучение СМО начинается с анализа входящего потока требований. **Входящий поток требований** представляет собой совокупность требований, которые поступают в систему и нуждаются в обслуживании. Входящий поток требований изучается с целью установления закономерностей этого потока и дальнейшего улучшения качества обслуживания. В большинстве случаев входящий поток неуправляем и зависит от ряда случайных факторов. Число требований, поступающих в единицу времени, случайная величина. Случайной величиной является также интервал времени между соседними поступающими требованиями. Однако среднее количество требований, поступивших в единицу времени, и средний интервал времени между соседними поступающими требованиями предполагаются заданными. Среднее число требований, поступающих в систему обслуживания за единицу времени, называется **интенсивностью поступления требований**, и

определяется следующим соотношением: $\lambda = \frac{1}{T}$. Для многих реальных процессов поток требований достаточно хорошо описывается законом распределения Пуассона. Такой поток называется *простейшим*.

Простейший поток обладает такими важными свойствами:

1. *Свойством стационарности*, которое выражает неизменность вероятностного режима потока по времени. Это значит, что число требований, поступающих в систему в равные промежутки времени, в

среднем, должно быть постоянным. Например, число вагонов, поступающих под погрузку в среднем в сутки должно быть одинаковым для различных периодов времени, к примеру, в начале и в конце декады.

2. *Отсутствия последействия*, которое обуславливает взаимную независимость поступления того или иного числа требований на обслуживание в непересекающиеся промежутки времени. Это значит, что число требований, поступающих в данный отрезок времени, не зависит от числа требований, обслуженных в предыдущем промежутке времени. Например, число автомобилей, прибывших за материалами в десятый день месяца, не зависит от числа автомобилей, обслуженных в четвертый или любой другой предыдущий день данного месяца.
3. *Свойством ординарности*, которое выражает практическую невозможность одновременного поступления двух или более требований.. И вероятность $P_k(t)$ того, что в обслуживающую систему за время t поступит именно k требований:

$$P_k(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!},$$

где λ (интенсивность) - среднее число требований, поступивших на обслуживание в единицу времени. На практике условия простейшего потока не всегда строго выполняются. Часто имеет место нестационарность процесса (в различные часы дня и различные дни месяца поток требований может меняться, он может быть интенсивнее утром или в последние дни месяца). Существует также наличие последействия, когда количество требований на отпуск товаров в конце месяца зависит от их удовлетворения в начале месяца. Наблюдается и явление неоднородности, когда несколько клиентов одновременно пребывают на склад за материалами. Однако в целом пуассоновский закон распределения с достаточно высоким приближением отражает многие процессы массового обслуживания. Почему такое предположение в ряде важных случаев оказывается верным, дает ответ общая **теорема А.Я.Хинчина**, которая представляет исключительную теоретическую и практическую ценность. Эта теорема имеет место в случае, когда входящий поток можно представить в виде суммы большого числа независимых потоков, ни один из которых не является сравнимым по интенсивности со всем суммарным потоком. Приведем “не строгую” формулировку этой теоремы.

Теорема (А.Я.Хинчин) Если входящий поток представляет собой сумму большого числа независимых между собой стационарных и ординарных потоков, каждый из которых вносит малый вклад в общую сумму, то при одном дополнительном условии аналитического характера (которое обычно выполняется на практике) поток близок к простейшему.

Применение этой теоремы на практике можно продемонстрировать, на следующем примере: поток судов дальнего плавания в данный грузовой порт, связанный со многими портами мира, можно считать близким к

простейшему. Это дает нам право считать поток прибытия судов в порт распределенным согласно процесса Пуассона. Кроме того, наличие пуассоновского потока требований можно определить статистической обработкой данных о поступлении требований на обслуживание. Одним из признаков закона распределения Пуассона является равенство математического ожидания случайной величины и дисперсии этой же величины: $a = \sigma^2$. Одной из важнейших характеристик обслуживающих устройств, которая определяет пропускную способность всей системы, является **время обслуживания**.

Время обслуживания одного требования (t_{obs}) - случайная величина, которая может изменяться в большом диапазоне. Она зависит от стабильности работы самих обслуживающих устройств, так и от различных параметров, поступающих в систему, требований (к примеру, различной грузоподъемности транспортных средств, поступающих под погрузку или выгрузку). Случайная величина (t_{obs}) полностью характеризуется законом распределения, который определяется на основе статистических испытаний. На практике чаще всего принимают гипотезу о показательном законе распределения времени обслуживания. Показательный закон распределения времени обслуживания имеет место тогда, когда плотность распределения резко убывает с возрастанием времени t . Например, когда основная масса требований обслуживается быстро, а продолжительное обслуживание встречается редко. Наличие показательного закона распределения времени обслуживания устанавливается на основе статистических наблюдений. При показательном законе распределения времени обслуживания вероятность $P_{obs}(t)$ события, что время обслуживания продлится не более чем t , равна:

$$P_{obs}(t) = 1 - e^{-\nu t}$$

где ν - интенсивность обслуживания одного требования одним обслуживающим устройством, которая определяется из соотношения:

$$\nu = \frac{1}{t'_{obs}} \quad (1)$$

где t'_{obs} - среднее время обслуживания одного требования одним обслуживающим устройством.

Следует заметить, что если закон распределения времени обслуживания показательный, то при наличии нескольких обслуживающих устройств одинаковой мощности закон распределения времени обслуживания несколькими устройствами будет также показательным.

$$P_{obs}(t) = 1 - e^{-\nu n t}$$

Важным параметром СМО является **коэффициент загрузки** α , который определяется как отношение интенсивности поступления требований к интенсивности обслуживания ν :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\nu} \quad (2)$$

где λ - интенсивность поступления требований в систему;

ν - интенсивность обслуживания одного требования одним обслуживающим устройством.

ν Из (1) и (2) получаем, что $\alpha = \lambda t'_{obs}$.

Произведение $\lambda t'_{obs}$ показывает количество требований, поступающих в систему обслуживания за среднее время обслуживания одного требования одним устройством.

Загрузка α - это среднее число заявок, приходящих за среднее время обслуживания одной заявки.

Для СМО с ожиданием количество обслуживаемых устройств n должно быть строго больше коэффициента $n > \alpha$. В противном случае число поступающих требований будет больше суммарной производительности всех обслуживающих устройств, и очередь будет неограниченно расти. Для СМО с отказами и смешанного типа это условие может быть ослаблено, для эффективной работы этих типов СМО достаточно потребовать, чтобы минимальное количество обслуживаемых устройств n было не меньше коэффициента загрузки $n \geq \alpha$.

3. Характеристика систем массового обслуживания

К характеристикам систем массового обслуживания относятся:

- среднее время обслуживания;
- среднее время ожидания в очереди;
- среднее время пребывания в системе массового обслуживания;
- средняя длина очереди;
- среднее число заявок в системе массового обслуживания;
- количество каналов обслуживания;
- интенсивность входящего потока заявок;
- интенсивность обслуживания;
- интенсивность нагрузки;
- коэффициент нагрузки;
- относительная пропускная способность;
- абсолютная пропускная способность;
- доля времени простоя системы массового обслуживания;
- доля обслуженных заявок;
- доля отклоненных заявок;
- среднее число занятых каналов;
- среднее число свободных каналов;
- коэффициент загрузки каналов;
- среднее время простоя каналов.

Критериями эффективности систем массового обслуживания являются:

- ♣ вероятность отказа;
- ♣ относительная пропускная способность;
- ♣ абсолютная пропускная способность.