

## Лекция 7

### Классификация задач и методов принятия решений

#### План

1. Классификация задач принятия решений
2. Классификация методов принятия решений
3. Характеристика методов теории полезности

#### Классификация задач принятия решений

Задачи принятия решений отличаются большим многообразием, классифицировать их можно по различным признакам, характеризующим количество и качество доступной информации. В общем случае задачи принятия решений можно представить следующим набором информации [8, 17, 18]:

$\langle T, A, K, X, F, G, D \rangle$ ,

где  $T$ - постановка задачи (например, выбрать лучшую альтернативу или упорядочить весь набор);

$A$  - множество допустимых альтернативных вариантов;

$K$ - множество критериев выбора;

$X$ - множество методов измерения предпочтений (например, использование различных шкал);

$F$ - отображение множества допустимых альтернатив в множество критериальных оценок (исходы);

$G$  - система предпочтений эксперта;

$D$  - решающее правило, отражающее систему предпочтений.

Любой из элементов этого набора может служить классификационным признаком принятия решений.

Рассмотрим традиционные классификации:

1. *1. По виду отображения  $F$ .* Отображение множества  $A$  и  $K$  может иметь детерминированный характер, вероятностный или неопределенный вид, в соответствии с которым задачи принятия решений можно разделить на задачи в условиях риска и задачи в условиях неопределенности.

2. *2. Мощность множества  $K$ .* Множество критериев выбора может содержать один элемент или несколько. В соответствии с этим задачи принятия решений можно разделить на задачи со скалярным критерием и задачи с векторным критерием (многокритериальное принятие решений).

3. *3. Тип системы  $G$ .* Предпочтения могут формироваться одним лицом или коллективом, в зависимости от этого задачи принятия решений можно классифицировать на задачи индивидуального принятия решений и задачи коллективного принятия решений.

**Задачи принятия решений в условиях определенности.** К этому классу относятся задачи, для решения которых имеется достаточная и достоверная количественная информация. В этом случае с успехом применяются методы математического программирования, суть которых состоит в нахождении оптимальных решений на базе математической модели

реального объекта. Основные условия применимости методов математического программирования следующие:

1. Задача должна быть хорошо формализована, т. е. имеется адекватная математическая модель реального объекта.

2. Существует некоторая единственная целевая функция (критерий оптимизации), позволяющая судить о качестве рассматриваемых альтернативных вариантов.

3. Имеется возможность количественной оценки значений целевой функции.

4. Задача имеет определенные степени свободы (ресурсы оптимизации), т. е. некоторые параметры функционирования системы, которые можно произвольно изменять в некоторых пределах в целях улучшения значений целевой функции.

**Задачи в условиях риска.** В тех случаях, когда возможные исходы можно описать с помощью некоторого вероятностного распределения, получаем задачи принятия решений в условиях риска. Для построения распределения вероятностей необходимо либо иметь в распоряжении статистические данные, либо привлекать знания экспертов. Обычно для решения задач этого типа применяются методы теории одномерной или многомерной полезности. Эти задачи занимают место на границе между задачами принятия решений в условиях определенности и неопределенности. Для решения этих задач привлекается вся доступная информация (количественная и качественная).

**Задачи в условиях неопределенности.** Эти задачи имеют место тогда, когда информация, необходимая для принятия решений, является неточной, неполной, неколичественной, а формальные модели исследуемой системы либо слишком сложны, либо отсутствуют. В таких случаях для решения задачи обычно привлекаются знания экспертов. В отличие от подхода, принятого в экспертных системах, для решения ЗПР знания экспертов обычно выражены в виде некоторых количественных данных, называемых предпочтениями.

**Выбор и нетривиальность задач принятия решений.** Следует отметить, что одним из условий существования задачи принятия решений является наличие нескольких допустимых альтернатив, из которых следует выбрать в некотором смысле лучшую. При наличии одной альтернативы, удовлетворяющей фиксированным условиям или ограничениям, задача принятия решений не имеет места.

Задача принятия решений называется тривиальной, если она характеризуется исключительно одним критерием  $K$  и всем альтернативам  $A_i$  приписаны конкретные числовые оценки в соответствии со значениями указанного критерия (рис. 1.1 а).

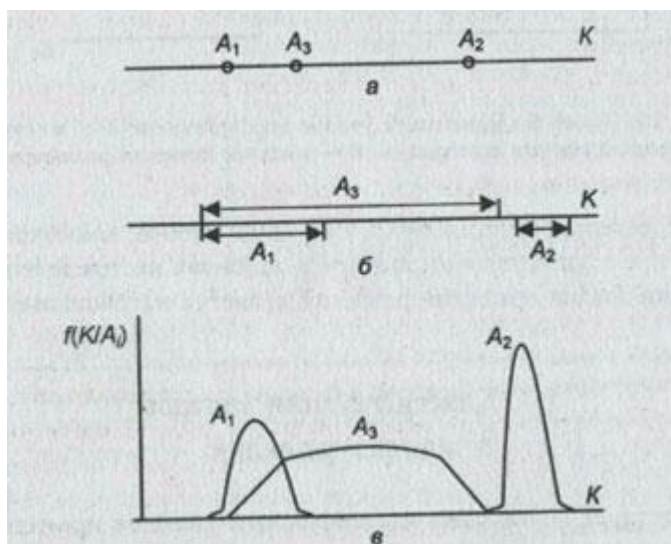


Рис. 1.1. Выбор альтернативы при одном критерии:  
 а - в условиях определенности;  
 б - в условиях неопределенности;  
 в - в условиях риска

Задача принятия решений перестает быть тривиальной даже при одном критерии  $K$ , если каждой альтернативе  $A_i$  соответствует не точная оценка, а интервал возможных оценок (рис. 1.1 б) или распределение  $f(K/A_i)$  на значениях указанного критерия (рис. 1.1 в).

Нетривиальной считается задача при наличии нескольких критериев принятия решений (рис. 1.2) независимо от вида отображения множества альтернатив в множество критериальных оценок их последствий.

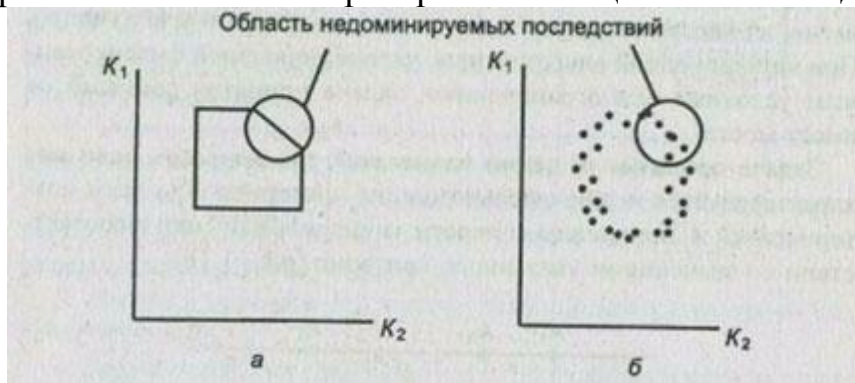


Рис. 1.2. Выбор альтернативы с учетом двух критериев:  
 а - в случае непрерывной области альтернатив;  
 б - в случае дискретных альтернатив

Следовательно, при наличии ситуации выбора, многокритериальности и осуществлении выбора в условиях неопределенности или риска задача принятия решений является нетривиальной.

### Классификация методов принятия решений

Существует множество классификаций методов принятия решений, основанных на применении различных признаков [10, 19 - 23]. В табл. 1.1 приведена одна из возможных классификаций, признаками которой являются содержание и тип получаемой экспертной информации.

Таблица 1.1

### Классификация методов принятия решений

п/п	Содержание информации	Тип информации	Метод принятия решений
	Экспертная информация не требуется		Метод доминирования [24, 25] Метод на основе глобальных критериев [26, 27]
	Информация о предпочтениях на множестве критериев	Качественная информация. Количественная оценка предпочтительности критериев. Количественная информация о замещениях	Лексикографическое упорядочение [24,25] Сравнение разностей критериальных оценок [22,24] Метод припасовывания [24] Методы "эффективность-стоимость" [24,28] Методы свертки на иерархии критериев [29,30] Методы порогов [24, 31] Методы идеальной точки [24] Метод кривых безразличия [10,24] Методы теории ценности [10, 24]
	Информация о предпочтительности альтернатив	Оценка предпочтительности парных сравнений	Методы математического программирования [32,33]. Линейная и нелинейная свертка при интерактивном способе определения ее параметров [34]
	Информация о предпочтениях на множестве критериев	Отсутствие информации о предпочтениях; количественная и/или	Методы с дискретизацией неопределенности

	и о последствиях альтернатив	интервальная информация о последствиях. Качественная информация о предпочтениях и количественная информация о последствиях. Качественная (порядковая) информация о предпочтениях и последствиях. Количественная информация о предпочтениях и последствиях	[8,26]. o Стохастическое доминирование [8,10,22]. o Методы принятия решений в условиях риска и неопределенности на основе глобальных критериев [8, 35] и Метод анализа иерархий [36] o Методы теории нечетких множеств [7, 13, 14, 15, 17, 37] и Метод практического принятия решений [8, 24]. Методы выбора статистически ненадежных решений [8,38]. Методы кривых безразличия для принятия решений в условиях риска и неопределенности [8] Методы деревьев решений [8,37]. Декомпозиционные методы теории ожидаемой полезности [8, 10,11]
--	------------------------------	--	--

Используемый принцип классификации позволяет достаточно четко выделить четыре большие группы методов, причем три группы относятся к принятию решений в условиях определенности, а четвертая - к принятию решений в условиях неопределенности. Из множества известных методов и подходов к принятию решений наибольший интерес представляют те, которые дают возможность учитывать многокритериальность и неопределенность, а также позволяют осуществлять выбор решений из множеств альтернатив различного типа при наличии критериев, имеющих разные типы шкал измерения (эти методы относятся к четвертой группе).

В свою очередь, среди методов, образующих четвертую группу, наиболее перспективными являются декомпозиционные методы теории

ожидаемой полезности, методы анализа иерархий и теории нечетких множеств. Данный выбор определен тем, что эти методы в наибольшей степени удовлетворяют требованиям универсальности, учета многокритериальности выбора в условиях неопределенности из дискретного или непрерывного множества альтернатив, простоты подготовки и переработки экспертной информации.

Охарактеризовать достаточно полно все методы принятия решений, относящиеся к четвертой группе, в рамках данной работы невозможно, поэтому в дальнейшем рассматриваются только три подхода к принятию решений в условиях неопределенности, которые получили наиболее широкое воплощение в системах компьютерной поддержки, а именно: подходы, основанные на методах теории полезности, анализа иерархий и теории нечетких множеств.

### **Характеристика методов теории полезности**

Декомпозиционные методы теории ожидаемой полезности получили наиболее широкое распространение среди группы аксиоматических методов принятия решений в условиях риска и неопределенности.

Основная идея этой теории состоит в получении количественных оценок полезности возможных исходов, которые являются следствиями процессов принятия решений. В дальнейшем на основании этих оценок можно выбрать наилучший исход. Для получения оценок полезности необходимо иметь информацию о предпочтениях лица, ответственного за принимаемое решение.

Парадигма анализа решения может быть сведена к процессу, включающему пять этапов [10].

Этап 1. Предварительный анализ. На этом этапе формулируется проблема и определяются возможные варианты действий, которые можно предпринять в процессе ее решения.

Этап 2. Структурный анализ. Этот этап предусматривает структуризацию проблемы на качественном уровне, на котором ЛПР намечает основные шаги процесса принятия решений и пытается упорядочить их в виде некоторой последовательности. Для этой цели строится дерево решений, (рис.1.3).

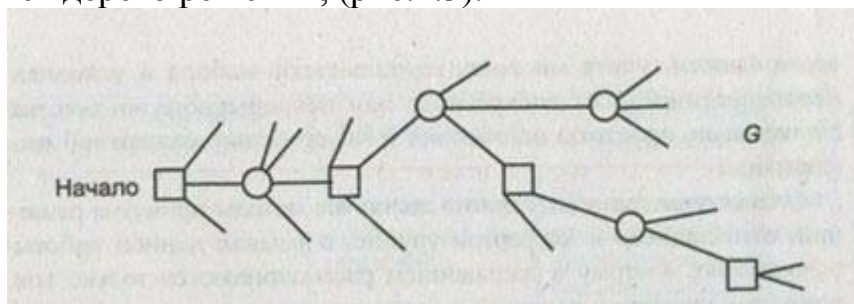


Рис. 1.3. Фрагмент дерева решений

Дерево решений имеет два типа вершин: вершины-решения (обозначены квадратиками) и вершины-случаи (обозначены кружочками). В вершинах-решениях выбор полностью зависит от ЛПР, в вершинах-случаях

ЛПР не полностью контролирует выбор, так как случайные события можно предвидеть лишь с некоторой вероятностью.

Этап 3. Анализ неопределенности. На этом этапе ЛПР устанавливает значения вероятности для тех ветвей на дереве решений, которые начинаются в вершинах-случаях. При этом полученные значения вероятностей подлежат проверке на наличие внутренней согласованности.

Для получения значений вероятности привлекается вся доступная информация: статистические данные, результаты моделирования, экспертная информация и т. д.

Этап 4. Анализ полезности. На данном этапе следует получить количественные оценки полезности последствий (исходов), связанных с реализацией того или иного пути на дереве решений. На рис. 1.3 показан один из возможных путей - от начала до точки G.

Исходы (последствия принимаемых решений) оцениваются с помощью функции полезности фон Неймана - Моргенштерна [39], которая каждому исходу  $rk$  ставит в соответствие его полезность  $u(rk)$ . Построение функции полезности осуществляется на основе знаний ЛПР и экспертов.

Этап 5. Процедуры оптимизации. Оптимальная стратегия действий (альтернатива, путь на дереве решений) может быть найдена с помощью вычислений, а именно: максимизации ожидаемой полезности на всем пространстве возможных исходов. Одно из условий постановки задачи оптимизации - наличие адекватной математической модели, которая связывает параметры оптимизации (в данном случае это альтернативные варианты действий) с переменными, входящими в целевую функцию (функция полезности). В методах теории полезности такие модели имеют вероятностный характер и основаны на том, что оценка вероятности ожидаемого исхода может быть использована для введения числовых оценок возможных вероятных распределений на конечном множестве исходов.

Задача выбора наилучшего решения в соответствии с аксиоматикой теории полезности [10] может быть представлена следующим образом:

$$\max_{A \in A} \left[ \bar{u}(A) = \int_K u(K) f(K/A) dK \right].$$

где  $u(K)$  - многомерная функция полезности;

$K$ - точка в критериальном пространстве;

$f(K/A)$  - функция плотности условного от альтернативы  $A$  распределения критериальных оценок.

Построение функций полезности является основной и наиболее трудоемкой процедурой методов теории полезности, после этого с помощью такой функции можно оценить любое количество альтернатив.

Процедура построения функции полезности включает пять шагов.

*Шаг 1.* Подготовительный. Главная задача здесь - подбор экспертов и разъяснение им того, как следует выражать свои предпочтения.

*Шаг 2.* Определение вида функции. Функция полезности должна отражать представления ЛПР и экспертов об ожидаемой полезности

возможных исходов. Поэтому множество исходов упорядочивается по их предпочтительности, после чего в соответствие каждому возможному исходу необходимо поставить предполагаемое значение ожидаемой полезности. На этом шаге выясняют, является ли функция полезности монотонной, убывающей или возрастающей, отражает ли она склонность, несклонность или безразличие к риску и т. п.

*Шаг 3.* Установление количественных ограничений. Здесь определяется интервал изменения аргумента функции полезности и устанавливаются значения функции полезности для нескольких контрольных точек.

*Шаг 4.* Подбор функции полезности. Необходимо выяснить, являются ли согласованными количественные и качественные характеристики, выявленные к данному моменту. Положительный ответ на этот вопрос равнозначен существованию некоторой функции, которая обладает всеми требуемыми свойствами. Если последует отрицательный ответ, то возникает проблема согласования свойств, что предполагает возврат на более ранние шаги.

*Шаг 5.* Проверка адекватности. Необходимо убедиться в том, что построенная функция полезности действительно полностью соответствует истинным предпочтениям ЛПР. Для этого применяются традиционные методы сравнения расчетных значений с экспериментальными.

Рассмотренная процедура соответствует задаче со скалярной функцией полезности. В общем случае последняя может быть векторной величиной. Это имеет место, когда ожидаемую полезность невозможно представить единственной количественной характеристикой (задача со многими критериями). Обычно многомерная функция полезности представляется как аддитивная или мультипликативная функция частных полезностей. Процедура построения многомерной функции полезности еще более трудоемка, чем одномерной.

Таким образом, методы теории полезности занимают промежуточное место между методами принятия решений в условиях определенности и методами, направленными на выбор альтернатив в условиях неопределенности. Для применения этих методов необходимо иметь количественную зависимость между исходами и альтернативами, а также экспертную информацию для построения функции полезности. Эти условия выполняются не всегда, что накладывает ограничение на применение методов теории полезности. К тому же следует помнить, что процедура построения функции полезности трудоемка и плохо формализуема.