Лекция 8

Общая постановка однокритериальной задачи принятия решений.

Общая постановка однокритериальной задачи принятия решений.

Пусть исход управляемого мероприятия зависит от выбранного решения (стратегии управления) и некоторых неслучайных фиксированных факторов, полностью известных лицу, принимающему решение. Стратегии управления могут быть представлены
в виде значений n-мерного вектора $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, на компоненты которою наложены ограничения, обусловленные рядом естественных причин и имеющие вид

$$g_i = g_i(A_i X) \{\le, =, \ge\} b_i; \qquad (2.2)$$
$$i = \overline{1, m}; \;\; m \{<, =, >\} n,$$

где A_i, некоторый массив фиксированных неслучайных параметров.

Условия (2.2) определяют область Ω_X допустимых значений стратегий X.

Эффективность управления характеризуется некоторым численным критерием оптимальности F:

$$F = F(X, C), \qquad (2.3)$$

где C — массив фиксированных, неслучайных параметров. Массивы A_i и C характеризуют свойства объектов, участвующих в управлении, и условия протекания управлении.

Перед лицом, принимающим решение, стоит задача выбора такого значения $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ вектора управления $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ из области Ω_X его допустимых значений, которое максимизирует значение критерия оптимальности F, а также значение $\overline{F}$ этого максимума

$$F = F(X, C) = \max_{x \in \Omega_X} F(X, C), \qquad (2.4)$$

где область Ω_X представляется условием (2.2).

В (2.4) символы $\overline{F}$ и $\overline{X}$ обозначают максимально достижимое в условиях (2.2) значение критерия оптимальности F и соответствующее ему оптимальное значение вектора управления X.

Совокупность соотношений (2.2), (2.3) и (2.4) представляет собой общий вид математической модели однокритериальной статической детерминированной ЗПР.

Задача в такой постановке полностью совпадает с общей постановкой задачи математического программирования. Поэтому весь арсенал методов, разработанных для решения задач математического программирования, может быть использован для решения задач принятия решений данного класса. Мы не будем здесь из-за недостатка места останавливаться на обзоре соответствующих методов решения.

Рассмотрим пример однокритериальной статической детерминированной ЗПР.

Пусть необходимо отображать некоторое количество информационных моделей (например, картографическую информацию). Для отображения любой из моделей всегда требуется решить n различных задач $З_1, З_2, \dots, З_n$ (отображение символов, отображение векторов, поворот и перемещение изображении, масштабирование и т.п.). Все задачи взаимно независимы. Для решения них задач могут быть использованы m различных микропроцессоров $M_1, M_2, \dots, M_n$. В течение времени T микропроцессор M_j, может решить a_{ij}, задач типа $З_i (i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m})$, т.е. решить задачу $З_i$, несколько раз по одному и тому же алгоритму, но для различных исходных данных.

Информационную модель можно отображать только в том случае, если она содержит полный набор результатов решения всех задач $З_1, З_2, \dots, З_n$.

Требуется распределить задачи по микропроцессором так, чтобы число информационных моделей, синтезированные за время *T,* было максимально. Иначе говори, необходимо указать, какую часть времени T микропроцессор M_j должен занимать решением задачи $З_i$,.

Обозначим эту величину через x_{ij} (если эта задача не будет решаться на данном микропроцессоре, то $x_{ij} = 0$).

Очевидно, что общее время занятной каждого микропроцессора решением тех задач не должно превышать общего запаса времени *Т*, «доля» — единицы. Таким образом, имеем следующие ограничительные условия:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} < 1; j = \overline{1,m}$$

Общее количество решений N_i задачи $З_i$, полученных всеми микро-процессорами вместе,

$$N_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij}; \;\; i = \overline{1,n}.$$

Так как информационная модель может быть синтезирована лишь из полного набора результатов решения всех задач, то количество информационных моделей F будет определяться минимальным из чисел N_i.

Итак, имеем следующую математическую модель: требуется найти такие x_{ij}, чтобы обращалась в максимум функция F

$$F = \min_{i} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij}; \;\; i = \overline{1,n},$$

при

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1; \;\; j = \overline{1,m}, \qquad x_{ij} \geq 0}.$$

Общая постановка однокритериальной статической задачи принятия решений в условиях риска.

Как отмечалось, каждая выбранная стратегия управления в условиях риска связана с множеством возможных исходов, причем каждый исход имеет определенную вероятность появления, известную заранее человеку, принимающему решение.

При оптимизации решения в подобной ситуации стохастическую ЗПР сводят к детерминированной. Широко используют при этом следующие два принципа: искусственное сведение к детерминированной схеме и оптимизация в среднем.

В первом случае неопределенная, вероятностная картина явления приближенно заменяется детерминированной. Для этого все участвующие в задаче случайные факторы приближенно заменяются какими-то неслучайными характеристиками этих факторов (как правило, их математическими ожиданиями).

Этот прием используется в грубых, ориентировочных расчетах, а также в тех случаях, когда диапазон возможных значений случайных величин сравнительно мал. В тех случаях, когда показатель эффективности управления линейно зависит от случайных параметров, этот прием приводит к тому же результату, что и «оптимизация в среднем».

Прием «оптимизация в среднем» заключается в переходе от исходного показателя эффективности Q, являющегося случайной величиной:

$$Q = Q\left(X, A, y_1, y_2, \dots, y_q\right),$$

где X — вектор управления; A — массив детерминированных факторов; $y_1, y_2, \dots, y_q$ — конкретные реализации случайных фиксированных факторов $Y_1, Y_2, \dots, Y_q$ к его осредненной, статической характеристике, например к его математическому ожиданию M[Q]:

$$F = M[Q] = \underbrace{\iint \dots \int}_{q} Q\left(X, A, y_1, y_2, \dots, y_q\right) \times f\left(y_1, y_2, \dots, y_q\right) dy_1, dy_2, \dots, dy_q$$

$$= F(X, A, B). \quad (2.5)$$

Здесь B — массив известных статистических характеристик случайных величин $Y_1, Y_2, \dots, Y_q; f\left(y_1, y_2, \dots, y_q\right)$ — закон распределения вероятностей случайных величин $Y_1, Y_2, \dots, Y_q$.

При оптимизации в среднем по критерию (2.5) в качестве оптимальной стратегии $\overline{X}$ будет выбрана такая стратегия, которая, удовлетворяя ограничениям на область Ω_X допустимых значений вектора X, максимизирует значение математического ожидания $F = M[Q]$ исходного показателя эффективности Q, т. е.

$$\overline{F} = F\left(\overline{X}, A, B\right) = \max F(X, A, B) = \max_{X \in \Omega_X} M\left[Q\left(X, A, y_1, y_2, \dots, y_q\right)\right]. \quad (2.6)$$

В том случае, если число возможных стратегий i конечно $i = \overline{1, I}$ и число возможных исходов j конечно $(j = \overline{1, J})$ то выражение (2.6) переписывается в виде

$$F = F(\overline{X}) = \max_{I \le i \le J}[F(X_i)] = \max_{I \le i \le J}[\sum_{j=1}^{J} P_{ij} Q_{ij}], \quad (2.7)$$

где Q_{ij} — значение показателя эффективности управления в случае появления j-го исхода при выборе i стратегии управления; P_{ij} — вероятность появления j-го исхода при реализации i-й стратегии.

Из выражений (2.6) и (2.7) следует, что оптимальная стратегия X приводит к гарантированному наилучшему результату только при многократном повторении ситуации в одинаковых условиях. Эффективность каждого отдельного выбора связана с риском и может отличаться от средней величины как в лучшую, так и в худшую сторону.

Сравнение двух рассмотренных принципов оптимизации в стохастических ЗПР показывает, что они представляют собой детерминизацию исходной задачи на разных уровнях влияния стохастических факторов. «Искусственное сведение к детерминированной схеме» представляет собой детерминизацию на уровне факторов, «оптимизация в среднем» — на уровне показателя эффективности.

После выполнения детерминизации могут быть использованы все методы, применимые для решения однокритериальных статических детерминированных ЗПР.

Рассмотрим пример однокритериальной статической задачи принятия решений в условиях риска.

Для создания картографической базы данных необходимо кодировать картографическую информацию. Использование поэлементного кодирования приводит к необходимости использования чрезвычайно больших объемов памяти. Известен ряд методов кодирования, позволяющих существенно сократить требуемый объем памяти [например, линейная интерполяции, интерполяция классическими многочленами, кубинские сплайны и т.д; см. кн. 4 настоящего сериала]. Основным показателем эффективности метода кодирования является коэффициент сжатия информации. Однако значение этого коэффициента зависит от вида кодируемой картографической информации (гидрография, границы административных районов, дорожная сеть и т. д). Обозначим через $Q_{ij} (i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m})$ значение коэффициента сжатия i-го метода кодирования для j-го вида информации. Конкретный район, подлежащий кодированию, заранее неизвестен. Однако предварительный анализ картографической информации всего региона и опыт предыдущих разработок позволяют вычислить вероятность появления каждого из видов информации. Обозначим через P_i, вероятность появления j-го вида,

$$\sum_{i=1}^{m} P_i = 1.$$

Тогда, используя метод оптимизации в среднем, следует выбрать такой метод кодирования, для которого

$$F = \max_i \sum_{i=1}^{m} P_i Q_{ij};\ \ i = \overline{1,n}$$

Критерии принятия решений в условиях риска:

1. Критерий ожидаемого значения.

Использование критерия ожидаемого значения обусловлено стремлением максимизировать ожидаемую прибыль (или минимизировать ожидаемые затраты). Использование ожидаемых величин предполагает возможность многократного решения одной и той же задачи, пока не будут получены достаточно точные расчётные формулы. Математически это выглядит так: пусть X - случайная величина с математическим ожиданием MX и дисперсией DX. Если $x_1, x_2, ..., x_n$ - значения случайной величины (с.в.) X, то среднее арифметическое их (выборочное среднее) значений $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ имеет дисперсию $\frac{DX}{n}$. Таким образом, когда $n \to \infty$

$\frac{DX}{n} \to 0$ и $\overline{x} \to MX$.

Другими словами при достаточно большом объёме выборки разница между средним арифметическим и математическим ожиданием стремится к нулю (так называемая предельная теорема теории вероятности). Следовательно, использование критерия ожидаемое значение справедливо только в случае, когда одно и тоже решение приходится применять достаточно большое число раз. Верно и обратное: ориентация на ожидания будет приводить к неверным результатам, для решений, которые приходится принимать небольшое число раз.

Пример 1. Требуется принять решение о том, когда необходимо проводить профилактический ремонт ПЭВМ, чтобы минимизировать потери из-за неисправности. В случае если ремонт будет производится слишком часто, затраты на обслуживание будут большими при малых потерях из-за случайных поломок.

Так как невозможно предсказать заранее, когда возникнет неисправность, необходимо найти вероятность того, что ПЭВМ выйдет из строя в период времени t. В этом и состоит элемент «риска».

Математически это выглядит так: ПЭВМ ремонтируется индивидуально, если она остановилась из-за поломки. Через T интервалов времени выполняется профилактический ремонт всех n ПЭВМ. Необходимо определить оптимальное значение T, при котором минимизируются общие затраты на ремонт неисправных ПЭВМ и проведение профилактического ремонта в расчёте на один интервал времени.

Пусть p_t - вероятность выхода из строя одной ПЭВМ в момент t, а n_t - случайная величина, равная числу всех вышедших из строя ПЭВМ в тот же момент. Пусть далее C_1 - затраты на ремонт неисправной ПЭВМ и C_2 - затраты на профилактический ремонт одной машины.

Применение критерия ожидаемого значения в данном случае оправдано, если ПЭВМ работают в течение большого периода времени. При этом ожидаемые затраты на один интервал составят

$$ОЗ = \frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} M(n_t) + C_2 n}{T},$$

где $M(n_t)$ - математическое ожидание числа вышедших из строя ПЭВМ в момент t. Так как n_t имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p_t), то $M(n_t) = np_t$. Таким образом

$$ОЗ = \frac{n(C_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + C_2)}{T}$$

Необходимые условия оптимальности T^* имеют вид:

$$ОЗ\ (T^*-1) \ge ОЗ\ (T^*),$$

$$ОЗ\ (T^*+1) \ge ОЗ\ (T^*).$$

Следовательно, начиная с малого значения T, вычисляют $ОЗ(T)$, пока не будут удовлетворены необходимые условия оптимальности.

Пусть $C_1 = 100$; $C_2 = 10$; $n = 50$. Значения p_t имеют вид:

T	p_t	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$ОЗ(T)$
1	0.05	0	$\frac{50\ (100 \cdot 0 + 10)}{1} = 500$
2	0.07	0.05	375
3	0.10	0.12	366.7
4	0.13	0.22	400
5	0.18	0.35	450

$T^* \to 3$, $ОЗ(T^*) \to 366.7$

Следовательно профилактический ремонт необходимо делать через $T^*=3$ интервала времени.

2. Критерий «ожидаемое значение – дисперсия».

Критерий ожидаемого значения можно модифицировать так, что его можно будет применить и для редко повторяющихся ситуаций .

Если x - с. в. с дисперсией DX, то среднее арифметическое $\bar{x}$ имеет дисперсию DX/n, где n - число слогаемых в $\bar{x}$. Следовательно, если DX уменьшается, и вероятность того, что $\bar{x}$ близко к MX, увеличивается. Следовательно, целесообразно ввести критерий, в котором максимизация ожидаемого значения прибыли сочетается с минимизацией её дисперсии.

Пример 2. Применим критерий «ожидаемое значение - дисперсия» для примера 1. Для этого необходимо найти дисперсию затрат за один интервал времени, т.е. дисперсию

$$з_T = \frac{C_1\sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}$$

Т.к. n_t, $t = \overline{1, T-1}$ - с.в.,то $з_T$ также с.в. С.в. n_t имеет биномиальное распределение с $M(n_t) = np_t$ и $D(n_t) = np_t(1\text{-}p_t)$. Следовательно,

$$D(з_T) = D(\frac{C_1\sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}) = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 D(\sum_{t=1}^{T-1} n_t) =$$

$$= \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} Dn_t = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} np_t(1-p_t) = n\left(\frac{C_1}{T}\right)^2 (\sum_{t=1}^{T-1} p_t \;\; \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2),$$

где $C_2 n = const.$

Из примера 1 следует, что

$$M(з_T) = M(з(T)).$$

Следовательно искомым критерием будет минимум выражения

$$M(з(T)) + к\, D(з_T).$$

Замечание. Константу «$к$» можно рассматривать как уровень не склонности к риску, т.к. «$к$» определяет «степень возможности» дисперсии $Д(з_T)$ по отношению к математическому ожиданию. Например, если предприниматель, особенно остро реагирует на большие отрицательные отклонения прибыли вниз от $M(з(T))$, то он может выбрать «$к$» много больше 1. Это придаёт больший вес дисперсии и приводит к решению, уменьшающему вероятность больших потерь прибыли.

При $к = 1$ получаем задачу

$$M(З(T)) + D(З(T)) = n\left\{\left(\frac{C_1}{T} + \frac{C_1^2}{T^2}\right)\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2 + \frac{C^2}{T}\right\}$$

По данным из примера 1 можно составить следующую таблицу

T	p_t	p_t^2	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t^2$	$M(з(T))+D(з(T))$
1	0.05	0.0025	0	0	500.00
2	0.07	0.0049	0.05	0.0025	6312.50
3	0.10	0.0100	0.12	0.0074	6622.22
4	0.13	0.0169	0.22	0.0174	6731.25
5	0.18	0.0324	0.35	0.0343	6764.00

Из таблицы видно, что профилактический ремонт необходимо делать в течение каждого интервала $T^* = 1$.

3. Критерий предельного уровня.

Критерий предельного уровня не дает оптимального решения, максимизирующего, например, прибыль или минимизирующего затраты. Скорее он соответствует определению приемлемого способа действий.

Пример 3. Предположим, что величина спроса x в единицу времени (интенсивность спроса) на некоторый товар задаётся непрерывной функцией распределения *f(x).* Если запасы в начальный момент невелики, в дальнейшем возможен дефицит товара. В противном случае к концу рассматриваемого периода запасы нереализованного товара могут оказаться очень большими. В обоих случаях возможны потери.

Т.к. определить потери от дефицита очень трудно, ЛПР может установить необходимый уровень запасов таким образом, чтобы величина ожидаемого дефицита не превышала A_1 единиц, а величина ожидаемых излишков не превышала A_2 единиц. Иными словами, пусть I - искомый уровень запасов. Тогда

$$\text{ожидаемый дефицит} = \int_I^\infty (x - I) f(x) dx \le A_1,$$

$$\text{ожидаемые излишки} = \int_0^I (I - x) f(x) dx \le A_2.$$

При произвольном выборе A_1 и A_2 указанные условия могут оказаться противоречивыми. В этом случае необходимо ослабить одно из ограничений, чтобы обеспечить допустимость.

Пусть, например,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20}{x^2}, \text{ если } 10 \le x \le 20, \\ 0\ , \text{ если } x \le 10 \text{ или } x \ge 20. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_I^{20} (x - I) f(x) dx = \int_I^{20} (x - I) \frac{20}{x^2} dx = 20(\ln \frac{20}{I} + \frac{I}{20} - 1)$$

$$\int_{10}^I (I - x) f(x) dx = \int_{10}^I (I - x) \frac{20}{x^2} dx = 20(\ln \frac{10}{I} + \frac{I}{10} - 1)$$

Применение критерия предельного уровня приводит к неравенствам

$$\ln I - \frac{I}{20} \ge \ln 20 - \frac{A_1}{20} - 1 = 1.996 - \frac{A_1}{20}$$

$$\ln I - \frac{I}{10} \ge \ln 10 - \frac{A_2}{20} - 1 = 1.302 - \frac{A_2}{20}$$

Предельные значения A_1 и A_2 должны быть выбраны так, что бы оба неравенства выполнялись хотя бы для одного значения I.

Например, если $A_1 = 2$ и $A_2 = 4$, неравенства принимают вид

$$\ln I - \frac{I}{20} \ge 1.896$$

$$\ln I - \frac{I}{10} \ge 1.102$$

Значение I должно находиться между 10 и 20, т.к. именно в этих пределах изменяется спрос. Из таблицы видно, что оба условия выполняются для I, из интервала (13,17)

I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\ln I - \frac{I}{20}$	1.8	1.84	1.88	1.91	1.94	1.96	1.97	1.98	1.99	1.99	1.99
$\ln I - \frac{I}{10}$	1.3	1.29	1.28	1.26	1.24	1.21	1.17	1.13	1.09	1.04	0.99

Любое из этих значений удовлетворяет условиям задачи.

Принятие решений при известных априорных вероятностях.

Будем обозначать вероятности гипотез: $Q_1 = p(P_1), Q_2 = p(P_2), \ldots, Q_n = p(P_n)$. Таким образом, мы считаем, что вероятности известны до того, как мы решили принять решение. Решение – выбор оптимальной стратегии A. говорят, что это ситуация идеального наблюдателя.

Естественно, в качестве критерия выбирается средний выигрыш, который мы получим, если выберем стратегию A_i. $\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Q_j$. Это аналог математического ожидания. Решение принимается по критерию: $\max_i \overline{a_i} - (1) -$ критерий максимального среднего выигрыша. Если задана матрица рисков, то можно для каждой строки вычислить средний риск: $\overline{r_i} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} Q_j$ и оптимальным будет являться решение, которое $\min_i \overline{r_i} - (2)$.

Возникает вопрос: не одно это и то же? Покажем, что оптимальное решение можно искать как по (1), так и по (2).

$$\overline{a_i} + \overline{r_i} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} Q_j + \sum_{j=1}^{n} r_{ij} Q_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Q_j + \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - a_{ij}) Q_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j Q_j = c$$

тогда: $\overline{a_i} + \overline{r_i} = c \Rightarrow \overline{a_i} = c - \overline{r_i}$; $\max \overline{a_i} = \min \overline{r_i}$; $\arg\max_i \overline{a_i} = \arg\min_i \overline{r_i}$.

$c -$ величина независящая от i, это постоянная величина для данной строки.

В результате решения выбирается чистая стратегия a_i. Есть ли смысл смешивать стратегии? Пусть мы смешиваем наши стратегии с вероятностями p_i, тогда в результате применения смешанной стратегии мы получим средний выигрыш в таком виде:

$$\overline{\overline{a}} = \overline{a_1} p_1 + \overline{a_2} p_2 + \ldots + \overline{a_m} p_m - \text{математическое ожидание}$$

Мы знаем, что МО меньше максимального значения $\overline{\overline{a}} < \overline{a_{\max}} \Rightarrow$ в игре с природой нет смысла смешивать стратегии; чистая стратегия обеспечивает наилучший результат. Слабым местом в этом подходе является то, что надо знать априорные вероятности. Если они неизвестны, то необходимо их изучить. Это можно делать путём экспериментов, которые учитывают условия природы. Говорят, что мы эту систему обучаем. Такой подход называется принципом адаптации к условиям.

Если априорные вероятности изучить не удаётся, то применяется принцип недостаточности основания: если не знаем о вероятности, то считаем, что гипотезы природы равновероятны. После этого применяем критерий идеального наблюдателя. Так как при равных вероятностях энтропия (неопределённость) максимальна, то мы применяем принцип пессимизма. Если сами значения вероятности неизвестны, но есть информация о предпочтениях гипотез, то существуют методы обработки предпочтений и получения вероятностей.

Если вероятности гипотез относятся как: $n:(n-1):(n-2):\ldots:2:1=Q_1:Q_2:\ldots:Q_n$; $\sum_{j=1}^{n} Q_j = 1$, то можно подсчитать саму величину вероятности в следующем виде:

$$Q_j = \frac{2(n-j+1)}{n(n+1)}; \quad j=\overline{1,n}$$

В некоторых случаях учитывается не только средний выигрыш, но также и дисперсия, т. е. величина разброса выигрыша в каждой строке:

$$\max_i \left(\overline{a_i} - k \times \sigma_{a_i}\right); \quad \sigma_{a_i} = \sqrt{D_{a_i}}$$